MEMORIE

DELL'

ISTITUTO NAZIONALE ITALIANO

CLASSE

DI FISICA E MATEMATICA

TOMO PRIMO. PARTE PRIMA

BOLOGNA. 1806

PRESSO I FRATELLI MASI E COMPAGNO

TIPOGRAFI DELL' ISTITUTO

ALLA

SACRA MAESTÀ

DI

NAPOLEONE PRIMO

IMPERATORE DE' FRANCESI

E

RE D' ITALIA

L' ISTITUTO

SIRE

Memore l' Istituto Nazionale Italiano dell' accoglienza clementissima fattagli dalla Sacra Maestà Vostra, quando in Bologna all' onore fu ammesso di offrirvi l' omaggio del suo

profondissimo ossequio; e che oltre a ciò per un tratto di quell'alta cortesía che alberga come in propria stanza ne' magnanimi petti, del favor pur lo degnaste di recarvi a rallegrare e beare della vostra Augusta presenza il suo umil soggiorno, osa venirvi davanti di nuovo e deporre ai piedi del vostro trono con questo volume le primizie in esso rinchiuse de' suoi studj e lavori. Non lo sconforta dal farlo nè lo disanima lo splendor della gloria che vi circonda; sebbene questa ecceda omai di tanto intervallo ogni confine e misura. Gli è, per vero dire, presente che in Voi rinovasi ciò che di

uno de' personaggj più eminenti dell' antichità leggesi presso uno scrittore inspirato il qual ne informa che al suo cospetto tacque la terra. Di questo memorabile detto non esita esso anzi ad affermare che secondo il costume di un ordine di scrittori usi a narrare a un tempo, e a un tempo ad annunziare il futuro, fu storico riguardo al vincitore di Dario, riguardo a Voi fu profetico. Di Voi in fatti si avvera che al prodigio del valor vostro e del vostro senno ammutoliscono le Nazioni, e i Reggitori loro consentono tacitamente a riconoscere in Voi l'Arbitro dell'Europa, di cui vi consegnano e affidano

i destini, nella persuasione che quello stesso Genio, a cui debbesi una serie d'imprese sì portentose, vi assisterà pure a ricomporla in uno stato di vera e solida tranquillità. Ma questa riflessione, nel riempierlo di meraviglia, non giugne a togliergli di lusingarsi che la MAESTÀ VOSTRA vorrà gradire un' offerta o un tributo piuttosto dovutole, come per tanti titoli, così anche perchè, a fine di non toccare fra le vostre divine laudi, che quella sola a cui sopra ogni altra si appoggiano le sue speranze, Voi, in quel Grande dell'antichità, all'ombra del quale si è desso accostato a parlarvi, più che non il

domatore dell'Asia, ambìte di lasciarvi addietro a grande distanza il Fondator d'Alessandria; il Conservatore della casa di Pindaro; quello che invidiava ad Achille la tromba d'Omèro; l'allievo e l'amico d'Aristotele; il patrocinatore degli Apelli e de' Lisippi.

Della Sacra Maestà Vostra

Umilissimi Ossequiosissimi Fedelissimi Servi e Sudditi

I Membri dell' Istituto Nazionale Italiano.

AVVISO AL LETTORE

Saranno forse di quelli, i quali al comparir loro davanti questo primo volume dell' Istituto Nazionale Italiano più tardi di quel ch' essi per avventura immaginavano, gliene faranno qualche rampogna; e accogliendolo con viso fra il lieto e il severo, vorranno saper come non abbia esso ascoltati tanti motivi che gl' imponevano di affrettarsi. Forsechè, diranno essi, non è omai pronto a spirare il triennio da che fu fondato un Corpo, del quale, chi ponga mente alla qualità de' Soggetti scelti a comporlo, e di quelli pure che gli elessero, niuno opinerà certamente che dovesse aver mestieri di crescere e rafforzarsi col tempo e coll' età, mentre anzi ragion vuole ch' esso fin nel suo primo nascere potesse aversi in conto di adulto, nè gli mancasse vigore, onde produr tostamente copiosi frutti e maturi? Forsechè, aggiugneranno, non gli era presente che qualche espettazione di se aveva esso mossa nel Pubblico? Che questo teneva gli occhj rivolti verso di lui? E che del Pubblico a' dì nostri sembra avverarsi che sia divenuto più che non in addietro nelle sue brame e speranze mal sofferente d' indugj? Di che forse può accagionarsi la rapidità stessa con cui a' dì nostri conformemente ai progressi

dell' universale civilizzazione, la quale, malgrado le declamazioni di alcuni melanconici, a certi riguardi almeno, inoltra visibilmente, gli pervengon notizie d'ogni maniera, che nel satisfare la sua curiosità, l' alimentano a un tempo e la sferzano e accendono ognora più. Taluno anche si farà ad osservare che potendo l' Istituto versare sopra oggetti numerosissimi e soprammodo svariati, è assai naturale che da un campo sì esteso debba senza grave stento raccogliersi una ricca messe di produzioni degne di vedere la luce. E perchè le querele e le accuse fioriscono spontaneamente su le labbra di molti, tal altro potrebbe additargli l' esempio di tante Società, quali estere, quali nazionali, da cui ha desso anche nel tempo del suo silenzio ricevute prove del loro zelo instancabile ne' doni pervenutigli de' periodici loro lavori; de' quali doni non può ad esso non premere assai di non tardare di troppo a ristorarle con offerte conformi.

Ai così fatti motivi che potrebbero offerirsi a taluno di accusare di colpevol pigrezza quelli ai quali per parte del Corpo rimane affidata la raccolta per la stampa delle produzioni accademiche e la loro publicazione, si lusingano questi che non si vorrà loro usar la durezza di aggiugnerne un altro oltre misura più forte, rammentando ad essi l' assistenza di cui un Governo illuminato e benefico è liberale verso questo Stabilimento. Riconoscono essi il peso di questo motivo, e del

rimprovero che in esso rinchiudesi, sarebbero al maggior segno dolenti, se non fossero consej a se stessi di avere quanto il consente la ristrettezza delle lor forze cercato di allontanare gl' inciampi sopravvenuti gli uni dietro gli altri a ritardare irreparabilmente l' impresa. Presso ogni equo e imparziale estimatore non è punto necessario di arrestarsi minutamente nell' esposizione di quest' inciampi. Ognuno in cui all' esperienza delle cose umane si accoppj qualche anche mediocre notizia intorno a questa classe di oggetti, può immaginargli agevolmente. A fine di toccare soltanto una circostanza nota a tutti, ognun vede che non ponno non procedere con qualche lentezza le operazioni d' un Corpo sparso sur una superficie sì estesa, qual è pur quella del regno italico, composto di Membri staccati gli uni dagli altri, alcuni anche isolati, distratti i più da occupazioni gravissime, e più anche che non per la distanza de' luoghi, per quella delle professioni poco fatti per legarsi e intendersela assieme. Parimente, poichè non è possibile di occultarlo, sia lecito di rammentare e deplorare lo svantaggio e lo sconcio che finora deriva all' Istituto dalla mancanza di tal sede, che o pel numero de' socj stabilmente in essa raccolti, o per la facilità e frequenza e regolarità delle loro convocazioni, sia come un centro da cui parta e si dirami pel Corpo e giunga alle membra tutte il vigore e la vita. E' per se stesso manifesto abbastanza che questo inconveniente finchè sussis-

ta, toglie o scema di molto il vantaggio che ne' lavori sociali deriva dall' union de' Membri; dalla comunicazion reciproca delle vedute e de' lumi; dall' associazione e cospirazion delle forze; da quella stessa nobile gara, di cui guai ai dotti e savj se una trista filosofía togliesse loro di sentirne lo stimolo, per cui nella carriera dell' industria e dell' onore trovandosi gli uni agli altri vicini, servonsi scambievolmente di cote. Ed è pur chiaro che il danno non può non istendersi anche ad abbracciare l' ultimo resultamento de' detti lavori o sia la loro pubblicazione. L' Istituto per altro si riconforta e racconsola della speranza, che tra non molto verrà posto a tutto riparo. Esulta esso, sapendo che può promettersel da quella gran Mente, della quale ben può dirsi che niente è tanto grande che non abbracci, e niente pur tanto picciolo ch' essa trascuri. L' Augusto nostro Sovrano si risovviene d' averlo da prima creato, e col permettergli che il suo fulgido nome ne fregiasse il catalogo, di avergli dato un pegno e un' arra della potente sua protezione: ed Esso pure in mezzo alle stesse altissime cure per le quali prepara all' attonita Europa un nuovo ordin di cose, non isdegna di occuparsi del nostro Corpo e de' suoi bisogni; e ben ciò bastar debbe a tranquillarne ed assicurarne ch' esso non tarderà guari ad esser posto in istato di corrispondere allo scopo a cui mira la sua istituzione, e alle speranze del Pubblico.

Se all' oggetto di farsi incontro alle querele di quelli che fossero per avventura disposti ad accusar questo volume di qualche lentezza nell' uscir alla luce, si è dovuto svelare ingenuamente uno degl' incomodi proprj dell' attual situazione dell' Istituto, la discretezza e decenza ne impone che in ciò non si trascorra oltre i confini del necessario. Però di buon grado si tace di alcuni altri o inciampi o infortunj piuttosto, che gli hanno vietato di dispiegare un' attività proporzionata alla natura ed estensione e prestanza dell' incumbenze affidategli. Questo semplice cenno basterà, perchè niuno che si accosta a leggere, non debba nè stupir punto nè molto dolersi di non incontrare alla testa del volume un ragguaglio storico, conformemente al costume adottato da molte accademie, delle quali non ha dubbio che non sia lodevol cosa l' imitare l' esempio, di quelle sopra tutto che serbano in ciò una certa sobrietà. Intorno a che, sebbene a chi prende la prima volta sott' occhio un certo ordin d' oggetti, la circospezione nell' avventurare l' opinion sua, sia in modo speciale raccomandata, si osa non pertanto osservare, che dovendo il ragguaglio comprendere gli avvenimenti qualunque seguìti nell' interno del Corpo, nella sua forma, nelle sue leggi, e dovendo pure informare il Pubblico delle occupazioni di esso intorno agli oggetti che in qualsiasi guisa si riferiscono allo scopo della sua istituzione, dovrà esso nel soddisfare al primo di questi doveri essere conciso as-

sai, giacchè non si vuol pretendere che agli affari interni d' un Corpo il Pubblico rechi quell' interesse che vi prendono i Membri. Forse la stessa singolare eleganza con cui sono dettate le storie, anche per questo pregio salite in fama, di alcune illustri accademie, non basterebbe al presente a scusarne in tutto la prolissità. Potrà esso o dovrà piuttosto arrestarsi alquanto a lungo sull' altra parte dell' esposizione dell' occupazioni e dei lavori. Quì è dove anzi, tutte le volte massime che s' incontra un oggetto fornito del carattere di nuovo, converrebbe che il ragguaglio presentasse un breve prospetto dello stato di quel ramo di cognizioni a cui l' oggetto appartiene, affinchè i coltivatori potessero nella storia dell' accademie, come in un archivio sopra ogni altro degno di raccogliergli, rinvenire i documenti opportuni a fissar l' epoche e i punti a cui si è giunto, e d' onde, per inoltrarsi con sicurezza, è d' uopo partire. Ma qualunque importanza diasi a una storia tale, da' pochi cenni pe' quali si è dovuto lasciar travedere parte dell' angustie in cui trovasi finora l' Istituto, ognuno ne inferirà agevolmente ch' essa sarebbe sì povera di notizie, che assolutamente giova serbarla intera ad un altro volume. Questo che al presente si pubblica, raduna le memorie appartenenti alla Classe detta di Fisica e Matematica; e queste sono sì numerose, che quegli a cui ne è affidata la pubblicazione, ha creduto di non dovere fra l' addizioni proprie del suo impiego, inserire che

quelle che più strettamente appartengono agli obblighi, ai quali è desso tenuto verso i suoi colleghi, vale a dire di restringersi a collocare sul principio del volume alcuni pochi Estratti di quelle memorie, che a norma delle determinazioni del Corpo giova presentare piuttosto in tal forma che intere; della qual determinazione si recheranno i motivi sull' ingresso de' detti estratti.

A questo volume succederà con breve intervallo un altro, in cui le altre due Classi, l'una di Scienze morali e politiche, l' altra di Letteratura e di Arti permetteranno che veggansi riunite le memorie da entrambe trasmesse. Per simil modo nella pubblicazion successiva de' volumi si terran separate le materie della prima Classe da quelle dell' altre, cosicchè ne resultino due serie distinte di tomi, de' quali per altro potrà qualche fiata accadere, che la copia delle produzioni concorse a formargli richiegga o consigli di spezzargli in parti, ove la mole di cadauna di queste corrisponda a quella di un giusto volume. Ma poichè l' avviso vi ha omai lettor saggio e cortese informato abbastanza di ciò che gli premeva che sapeste, esso non si crede lecito di trattenervi più a lungo sull' ingresso d' un volume in cui tanti oggetti vi si fanno incontro e a se v' invitano, degni tutti della vostra attenzione.

Solo permettetegli di aggiungere che l' Istituto si racconsola ed esulta che per sua grande ventura questo primo Volume si presenti al Pubblico in un' epoca,

in cui tutto annunzia e promette giorni lieti e sereni alle scienze, alle Lettere, ad ogni maniera di belli e nobili ed utili studj. Potranno questi quind' innanzi coltivarsi tranquillamente e crescere e prosperare all' ombra della Pace che sorride di nuovo alle nostre contrade e a tanta parte del Continente, per opera e dono di quel Grande, nel quale dopo questo immenso beneficio tutti omai riconoscono e adorano il Genio tutelar dell' Europa.

ESTRATTI

Non pochi a' dì nostri cominciano apertamente a lagnarsi che nella dirotta copia de' libri d' ogni maniera, de' quali ne inonda ed opprime la stampa, intantochè per poco omai il numero de' lettori non è scarso rimpetto a quello degli scrittori, anche le società scientifiche e letterarie nella pubblicazione de' loro atti si mostran dimentiche di quella lodevole sobrietà che pur loro esser dovrebbe in modo speciale raccomandata. Muovono le querele principalmente da quelli che per una certa solidità di carattere avendo a schifo ogni sorta d' inutil fasto, non ponno non dolersi che le accademie, le quali per proprio obbligo debbono opporsi all' ingresso ne' dominj della letteratura degli abusi qualunque, secondino anch' esse di troppo il gusto odierno e la moda, e a tratto a tratto lussureggino nel numero e nella mole de' volumi, che periodicamente mettono in luce; forse anche perchè non sono esse sempre quanto converrebbe difficili nella scelta delle produzioni che ammettono all' onore d' esservi inserite, e delle quali, comecchè portino in fronte il nome de' loro autori, poichè il Pubblico le riceve da un Corpo, sembra che questo in certa guisa se ne dichiari mallevadore. Forsechè, aggiungono i savj e giudiziosi uomini, non è pieno di buon succo e di vera sostanza il libro di mole mediocre anzichè no, in cui Magalotti rinserrò le fatiche e scoperte degli accademici del Cimen-

to? E perchè gli esempj preclari e degni d'essere all' imitazione proposti non è punto mestieri di cercargli fuori d'Italia, forsechè questa un altro non ce ne offre splendido per vero dire nella società privata di Torino, e ne' pochi volumi a questa dovuti, fra i quali, malgrado l'esilità della mole, si distingue il primo che rivolse verso di essa gli occhj e l'ammirazione di tutti, e bastò ad ottenerle un posto cospicuo fra l'accademie più ragguardevoli dell'Europa? E in realtà niente sembra tanto decente, quanto che opere offerte al Pubblico per parte d'un Corpo si pregino d'essere più ricche di cose che non di parole, più pesanti per così dire che non voluminose. Il perchè molta ragionevolezza si ravviserà senza dubbio nel consiglio e nella determinazione per cui il nazionale Istituto, versando in una delle sue convocazioni generali sull'articolo della stampa degli atti, allo scopo probabilmente di farsi incontro all'accennato inconveniente dell'eccesso nel numero e nella mole de' volumi, decretò che delle produzioni accademiche raccolte negli atti stessi e definitivamente approvate, non tutte fossero impresse quali gli autori loro le avevano trasmesse, ma di alcune convenisse piuttosto epilogarle in un estratto che in succinto rinchiudesse tuttociò che in esse contiensi d'essenziale e degno di giugnere alla notizia del Pubblico. Di qualche Memoria può in fatti avverarsi che un breve sunto, nel quale raccolgasi quanto essa rinchiude d'interessante, possa senza niun vero sconcio esserle sostituito. Tali fra l'altre sembra che debban esser quelle che furon lette od eran destinate ad esserlo; giacchè l'arrestarsi alquanto a lungo nello sviluppa-

mento di certi punti può riescir necessario a chi ascolta, poco utile e soverchio per chi legge. D' onde ognora meglio si scorge la saviezza del provvedimento adottato dall' Istituto che nel prescriverlo additò pure l' avvertenze e le norme, onde nell' esecuzione nè venga il Pubblico frodato di niuna alquanto importante osservazione contenuta nelle memorie epilogate, e gli autori di queste ne rimangano congiuntamente quanto è possibile soddisfatti.

DI UN NUOVO SALE FOSSILE SCOPERTO NEL BOLOGNESE.

Benchè non manca chi lungi di soffrir di mal grado una riduzion tale e adontarsene, si mostra disposto a gradirla per una condiscendenza, in cui il collega Laghi non ha voluto che verun lo prevenga. Lesse queti e consegnò agli atti un suo scritto intorno a un nuovo sale fossile scoperto, non ha molto, in una grotta delle colline Bolognesi, a poca distanza dal torrente Savena e da Pianoro. A muovere il nostro collega ad illustrar questo sale concorse coll' amor della Chimica da lui professata quel della patria, il nome della quale risuona dolce in modo speciale al cuore de' Bolognesi. Le pareti interne di quella grotta o caverna trovansi quà e là sparse di una lanugine salina, la quale, astergendone la matrice terrea su cui sorge, non tarda a rifiorire su di essa, ove massime regni nell' aria qualche umidità. Con poca fatica si riuscì a separare da ogn' impurità terrea la parte salina, e ad ottenerla in forma di bianchi cristalli prismatici che

sfarinano in bianca polvere, perdendo l' acqua di cristallizzazione pel mediocre calore di 20 gradi poco propriamente detti reaumuriani. Ascende a ben tre once il sale che ottiensi da una libbra di minerale terreo, e a scioglierlo perfettamente basta il doppio d'acqua. Amaro assai ne è il sapore, nè niuno de' caratteri gli manca proprj de' sali, che per l'accoppiamento dell' acido alla base alcalina al grado di saturazione meritamente diconsi medj o neutri. La parte terrea rimasta sul feltro si trovò essere una unione di più terre, di silice, di barite, di allumina, di magnesia, non senza qualche indizio di poco ferro in istato di ossido. Quest' analisi preliminare pose in istato il nostro accademico di operare direttamente sul sale, e di assoggettarlo ad un' altra più esatta che non tardò a svelargliene la natura intima e i componenti essenziali. Resultò da questa, che il nostro sale è un vero solfato di Magnesia. Fra l' altre prove gioverà recarne una sola che basta e sovrabbonda all' uopo, offertaci dall' analisi e dalla sintesi. Decomponendolo coll' Ammoniaca liquida, quinci si forma un solfato d' Ammoniaca, e quindi si depone una polvere bianca, fina, insipida, in cui, tormentandola in più guise e coll' industrie tutte familiari ai Chimici, si riconobbero le doti caratteristiche della Magnesia, non mica in istato di assoluta purezza, ma sibbene in quello di Carbonato di Magnesia. Con essa combinata coll' Acido Solforico si riformò un sale conforme in tutto per l' una parte a quello che si era da essa ottenuto, e identico pure per l' altra ai noti Solfati di Magnesia. Con questi esso non solo consente per tutti i titoli, ma negli usi medici ai

quali alcuni fra essi vengono utilmente applicati, non ha dubbio che non possa essere sostituito anche ai più rinomati, all' Ebsomense, a cagion d'esempio, al Modanese. Esso anzi senza ceder loro nell' innocenza, gli supera nell' attività. L'operazion sua come purgante, è sicura a un tempo e blanda ed efficace oltre a ciò a un segno che mezz'oncia di esso equivale a un' oncia intera degli altri. Se, com' è d'avviso il dotto e sincero Spielman, ne' Solfati di Magnesia alla facoltà di purgare accoppiasi un non so che di antiseptico, niente è tanto naturale, quanto che di un tal pregio si adorni pure il nostro sale. Per la scoperta di esso, ove, come non mancan motivi di lusingarsene, la miniera di Pianoro ne abbondi abbastanza, e tale si conservi, Bologna sarà tenuta allo zelo e all'industria del suo concittadino di averla sollevata di un tributo all' Estero, presso cui chi sa che non possa essa giugnere a spacciare il suo nuovo prodotto!

Non sia disdetto, prima di por fine al compendio, di osservare che la formazione e riproduzion successiva e perenne nella grotta di Pianoro di questa sostanza salina sembra che apra il campo ad una ricerca degna per le conseguenze a cui può trarre di rivolgere a se l' attenzione de' chimici, e richiesta forse a render compiuto il lavoro del nostro Accademico. Oggetto di questa pare ch' esser potrebbe il rintracciare e scoprir l' origine di quell' Acido Solforico, che affiggendosi alla Magnesia forma il nostro sale. D'onde deriva egli quest' Acido? del quale è pur d' uopo che sia incessante la produzione, giacchè a misura che le matrici terree della grotta vengono spogliate di sale, es-

so non cessa di fecondarnele. Il solo Ossigeno dell'aria atmosferica non basta all'uopo: è mestieri eziandio additar la sorgente del radicale assegnato a quest'Acido dai Neochimici. Nella memoria non si fa menzion niuna nè di zolfo nè di emanazioni sulfuree. Nella matrice analizzata non si è neppure scoperto niun Solfato metallico, dalla decomposizione del quale possa congetturarsi ch' esso si svolga di una guisa conforme a quella, con cui sprigionasi nella preparazione artificiale di quell'impuro sale catartico, di cui gl' Inglesi riempion l' Europa col nome di Ebsomense. Di questo punto è desiderabile che al nostro collega non manchi il tempo e l' agio e l'opportunità di occuparsi. Ov'ei riesca a mostrar la sorgente dell' Acido Solforico richiesto alla formazione successiva e incessante del suo sale, e giunga all' intento, attenendosi ai principj della nuova Chimica, i coltivatori e fautori di questa gliene sapranno grado senza dubbio; giacchè non può ad essi non premere assai di giugnere a chiuder la bocca a qualche fastidioso che gli ammonisse del bisogno e dell' obbligo di uscire a tratto a tratto dalle loro officine, e gl' invita a cercare alle nuove dottrine un appoggio anche più solido ne'grandi laboratorj della natura.

Benchè la considerazione delle sostanze saline fossili potrebbe anche invitarlo ad entrare in un' altra indagine di un ordine assai più elevato. A questi tempi il geologo non contento di notare le differenze sensibili delle minerali sostanze, quanto è mestieri a distinguerle e tenerne registro, ha creduto di dover entrare in istretta lega col Chimico, e di questa giovarsi all' uopo di rintracciarne e fissarne gli specifici ed essen-

ziali caratteri. In tal guisa raduna esso porzione almeno de' materiali richiesti a formarne a qualche tempo la teoria fisica del Globo. Impresa quanto niun' altra magnifica, a cui è ben degno ch' esso tenga rivolte le mire, quand' anche ogni suo sforzo dovesse riuscire a voto a motivo del campo angusto assai, da cui non gli è lecito di uscire, ristretto, può dirsi, alla sola corteccia della terra. In questo dubbio in fatti concorrono molti o savj e circospetti, o timidi che debban dirsi, i quali si restringono ad ammirare il coraggio di chi nello stato attuale della nostra abitazione pretende di leggere le vicende e catastrofi da essa sofferte, e in certi romanzi geologici e cosmologici, de' quali anche più de' passati abbondano i nostri tempi, annunzia la persuasione di posseder dati onde narrarne lo stato presente e passato, e, se a Dio piace, anche futuro della medesima. Ma mettendo da parte i vanti degli uni e i timori degli altri, si osservi piuttosto, che fra gli acquisti dovuti all' accoppiamento della Geologia e della Chimica, non è l' ultimo quello per cui cresce ogni dì più il numero delle sostanze saline sparse sulla faccia e nell' interno del Globo. Quest' indole si ravvisa in molti corpi, che, non ha molto, mettevansi fra le terre, e il nome tuttavia ne ritengono: di che niuno a mio avviso vorrà molto stupire, ove ponga mente, quinci all' attività somma di quell' agente qualunque, che affiggendosi alle terre, imprime loro il carattere salino, quindi alla varietà e all' importanza degli usi affidati dalla natura a questo agente medesimo, cui ha dessa però sparso largamente per ogni dove e infuso per così dire, perentro alla materia terrestre, affinchè

questa dall' energia del medesimo soffrisse una prima manipolazione richiesta a toglierle l' indole sua primitiva indocile e refrattaria, e a renderla solubile nel veicolo acqueo versato pure dalla stessa natura nelle viscere e sulla faccia del Globo, e nell' immenso serbatojo de' mari in quella copia che tutti sanno; giacchè l' intervento di questo veicolo era indispensabile all' impiego acconcio della materia terrestre in que' tanti e sublimi lavori a cui essa serve ne' corpi organici, ne' quali, se ben si mira, forma il fondo e la base del tessuto loro fibroso e degli stami elementari di questo. E qui, a fine di allargare alcun poco il campo alle riflessioni, sia lecito di congratularci co' nostri tempi, ne' quali sembra che siasi riuscito a sollevare un angolo del velo che per tanto tempo ci ha tenuta nascosta l' origine del principio salino. Allude questa osservazione alla scoperta recentissima di alcuni effetti chimici ottenuti con uno strumento, di cui sonosi impadroniti egualmente e Fisici e Chimici, voglio dire, col piliere di Volta. Tutto cospira omai ad assicurarne che la Corrente elettrica la quale sgorga dall' estremo detto positivo di questo strumento, ha forza d' impregnar l' acqua d' un principio salino affine e identico anzi all' acido marino; e parimente che quella la qual parte o a meglio dire entra nell' estremo negativo, le comunica un principio salino d' indole alcalina, e precisamente conforme a quello che presso i Neochimici ha nome di Soda. Questo gran fatto qualche anno prima annunziato dal sapore quinci acido quindi urente che risvegliasi sulla lingua applicata all' uno e all' altro degli Estremi mentovati, sembra additarne l' influsso e il concorso dell'

Agente elettrico alla formazion primitiva del principio salino e delle modificazioni di questo. Di un tal Agente non ha dubbio che non penetri profondamente la mole terrestre e non ne ricerchi intimamente e non ne rimescoli le parti tutte. Consentono i Fisici a riconoscere in esso una delle principali molle impiegate dalla natura nelle sue più generali e recondite operazioni; e bene havvi forse luogo a stupire che mentre da gran tempo della luce e del principio igneo si opina ch' essi esistano ne' due stati e di libertà e di combinazione, non sia sorto sospetto che ciò pure si avveri della sostanza elettrica; o a meglio dire, giacchè questo sospetto si è pur offerto a taluno, delle ammonizioni che riguardo a ciò incontransi nelle recenti opere del Decano de' Fisici europei non si tenga quel conto che pur sembra che meritino. Certo non mancano indizj onde congetturare che composta non poco e moltiplice sia la costituzione di questo grande Agente; ch' esso assiduamente si decomponga e si ricomponga; e che i suoi diversi ingredienti siano impiegati a formare chi sa dirne quanti prodotti. Fortunatamente ad avvalorare queste congetture è sopravvenuto il Piliere di Volta, e ne ha mostrata un' origine in tutto nuova e impensata del principio salino.

A buon conto pare che quinci si faccia strada a comprendere come abbondar debba nel Globo sopra ogni altra sostanza salina quella che appunto deriva dall' accoppiamento dell' acido marino o muriatico *(a)* che

(a) Muria è lo stesso che salamoja in italiano, *saumure* in francese; vale a dire è termine generico, di cui però non ben si scorge per qual

voglia dirsi, e della Soda. Giovà sperare che i Fisici sapranno del nuovo strumento offerto loro dal nostro collega giovarsi a penetrar nell'arcano dell'intima composizione de' corpi. A chi non è noto che quasi il solo prisma fruttò al Newton la creazione d'una nuova Ottica? Questo stesso poderoso strumento ne obbligherà forse a riformare molte idee, che alcuni sonosi affrettati di adottare, appoggiandosi al testimonio e all' autorità della bilancia; della quale sembra lecito il dire ch' essa merita senza dubbio d' essere ritenuta ne' laboratorj de' Chimici e ne' gabinetti de' Fisici, e interrogata spesso e consultata; ma che nell'atto stesso chi, sdegnando di tener conto delle sostanze imponderabili, si accinge ad interpretare i fenomeni della natura, getta, direbbe forse Bacone, lungi da se la chiave de' più riposti segreti della medesima.

DELLE CAGIONI DIRADATRICI DELLE TENEBRE NELL' ECLISSI SOLARE DEGLI 11 Febbrajo 1804.

Dell' oscuramento che accompagnò l' eclissi solare degli 11 febbrajo 1804 sembra lecito il dire, che a gran torto senza dubbio presso il volgo e presso molti anche che si adonterebbero d' esser confusi col volgo, esso oscurò un tal poco e di volo il credito degli astronomi. Il bujo non fu di gran lunga sì fitto quale al-

motivo sia stato scelto a servir di radice al nome assegnato a un sale particolare. D' altra parte sembra, per vero dire, che il mare abbia per lo meno tanto diritto di dare il nome a un sale, quanto la Prussia, da cui per una bizzarria inconcepibile in una lingua che ha l' ambizione di essere filosofica, si denomina l' acido prussico.

cuni fra essi lo avevano annunziato, e qual sulla loro fede e parola il popolo lo aspettava. Esso in più luoghi altamente ne mormorò; e ben si vide in quest' incontro che la stima verso i dotti è presso la moltitudine un sentimento, di cui essa coglie volentieri ogni motivo o pretesto di sgravarsi. A porre in salvo l' onor degli astronomi indirizza l' Abate Mari un suo opuscolo, di cui ei permetterà che venga epilogato, giacchè per l' una parte è scemato forse alquanto l' interesse con cui il Pubblico l'avrebbe accolto, se fosse comparso poco dopo il fenomeno; e per l' altra negli sminuzzamenti, in cui entra, più necessarj a chi ascolta che non a chi legge, e nello stesso stile un po' florido e nello sfoggio dell' immagini, di cui si adorna, porta i caratteri di un discorso destinato a trattenere piacevolmente un' udienza.

La somma delle difese riducesi a mostrare che coll' eclissi concorse una circostanza atmosferica, della quale gli astronomi usi a tener gli occhj fissi in cielo, e schifi di abbassargli verso gli oggetti sublunari, o più veramente tenuti a valersi de' soli dati proprj della lor scienza, non dovevano tener conto nell'accignersi a determinare il grado a cui in quell' incontro giugnerebbe l' oscuramento. Quand' anche d' una complicazion tale fosse sorto in essi qualche sospetto, non avrebbero esitato a metterla da parte, siccome oggetto che non ammettendo esattezza di calcoli e precision di misure, è posto fuori de' confini, oltre de' quali non si credon lecito di trascorrere.

Nel giorno e tempo dell' eclissi, presso noi e in molti luoghi, il cielo, sventuratamente per gli astrono-

mi e pe' curiosi fu coperto di un velo di nuvole, cui il nostro collega immagina non già presso terra, ma nelle più alte regioni dell'atmosfera, e steso in oltre per essa così ampiamente che al danno di non vedere l'eclissi partecipassero molti paesi. Di questa circostanza, per cui a prima vista sembra che dovesse crescere il bujo, ei si vale a mostrare ch'esso tutt' all'opposto non doveva esser sì cupo qual era stato annunziato. Avvisa egli, che la luce lanciata dal sole verso terra nell' incontrar l'atmosfera ingombra estremamente di vapori raccolti in nuvole sospese in essa a grande altezza, debba nell'attraversarla essere in mille guise refratta, ripercossa, svíata dal suo cammino per modo che all' occasione di un eclissi solare, que' tratti della superficie terrestre, pe' quali esso segue, approfittino di molta di quella luce, che senza ciò sarebbe ita per essi perduta. A fin di esprimere lo stesso pensiero in altri termini, l'atmósfera coperta estesamente di un velo che non giugne ad impedire il passaggio alla luce, ma solo a piegarla, e a misura che inoltra e lo penetra, a torcerla dal suo cammino, accendesi nell' alto di un cotal uniforme chiarore, da cui partono raggj verso que' tratti della superficie terrestre, ai quali la luna interposta vieterebbe che ne giugnessero direttamente. E perchè le parti diverse di questa stessa superficie vengono le une dietro le altre avvolte nell' ombra lunare, e l' eclissi in ognuna procede e avanza gradatamente, quinci pure si scorge come a scemare il bujo proprio in cadauna del punto in cui cade il massimo oscuramento, contribuir possa la luce per l' addotto motivo svíata verso di essa dalle parti che non so-

no peranche ad esso giunte, o lo hanno già oltrepassato. A questa congettura sembra che servir possa di appoggio qualche fenomeno atmosferico; come quello, di cui taluno si sarà forse avveduto, per cui pare che dalla luna piena e alta sull' orizzonte, quando l'aria è sparsa di una sottil nebbia che un tal poco l' appanni, giunga al suolo una illuminazione o più viva o più opportuna almeno al bisogno di vedere: o perchè in tal incontro dalle particelle della nebbia vien ripercossa e piegata verso un dato luogo maggior copia di raggj; o perchè giugnendo questi al suolo secondo tutte le direzioni, vien tolto di mezzo il contrasto e il danno di quell' ombre cupe e taglienti che alternano co' tratti illuminati a luna in tutto scoperta.

Si mostra pure il nostro collega disposto a tener conto di quella luce, che radendo la luna ne' confini reciproci dell' emisfero rivolto verso il sole, e di quello che mira la terra, e urtando in essi ad angoli acutissimi ne rimbalza verso noi e verso l' atmosfera terrestre, che piegandola verso il cono ombroso, la costringe ad immergersi in esso e a recare qualche soccorso di lume alle parti oscurate. Benchè nella viva brama di assister gli astronomi, ei non si crede disdetto di avventurare qualche congettura; e una ne propone e si arresta a svilupparla, ben comprendendo quanto sia essenziale al suo intento. Ha egli mestieri che quell'ampio velo di nuvole, a cui egli affida la principale difesa, occupi regioni alte assai nell' atmosfera. Senza ciò non avrebbe esso potuto farsi incontro alla luce diretta verso luoghi distanti da quelli, ne' quali l' eclissi accostavasi e giugneva al massimo oscuramento, e ri-

volgerla a profitto di questi. Ei dunque immagina che nella circostanza di un eclissi, meglio anche che non quella dell'ordinarie Neomènie opportuna a render cospirante ed efficace l' attrazione del sole e della luna sulla nostra atmosfera, questa dovesse non solo sollevarsi e allungarsi verso la luna, ma nell' accorrer da tutte bande, dovesse pure rapir con seco e distribuire a grande altezza quel velo di nuvole, in cui ei pone la cagion precipua che agli occhj del volgo pose in fallo le determinazioni degli astronomi. L' ipotesi è ardita e ingegnosa, ed è gran peccato ch' essa non vada in tutto d' accordo col fatto. Certo in Bologna le nuvole che nascosero la vista del sole, erano basse anzichè no; giacchè persone giunte da Lojano situato sopra montagne di mediocre altezza, narrarono che colà tutti meravigliando avevan veduto il sole falcato e nell' aspetto in cui ci si presenta la luna pochi dì prima o poco dopo il novilunio.

E intorno a ciò, giacchè il luogo è opportuno, non mi sia conteso d' inserire una mia osservazione ristretta in poche parole, onde la brevità le serva di scusa. Nel riflettere fra me e me agli sforzi, con cui alcuni valentissimi Fisici hanno a questi ultimi tempi cercato nel barometro qualche indizio dell' influsso della luna sulla nostra atmosfera soggetta, a parer loro, ad una specie di regolare marea conforme a quella dell' oceano, confesso che non senza qualche stupore gli scorgo dimentichi dell' azion del pianeta sopra il mercurio rinchiuso ne' barometri. Non ne incontro almen cenno nè presso il diligente Toaldo, nè presso l' acuto Lambert. Eppure par manifesto che di quell'azione debba congiun-

tamente all'aria accorgersi anche il mercurio. Ne' passaggj della luna pel meridiano se un tal poco scema il peso dell' aria, scema pure un tal poco quel del mercurio, nel quale però sembra che non dovrebbe scorgersi indizio di abbassamento. Io sospetto ch' esso dovrebbe piuttosto moversi verso l' alto; giacchè accorrendo la circostante aria verso dove il suo peso è scemato, l'allungamento delle sue colonne dovrebbe compensare lo scemamento del peso; e il mercurio, onde bilicarsi con esse, dovrebbe salire. Per un motivo conforme sembra che, all' opposto di quel che opinano i mentovati Fisici, dovrebbe, anzichè abbassarsi, salire alquanto il mercurio nelle sizigie e ne' punti del perigeo a fronte delle quadrature e dell'apogeo della luna; ove pur si ritenga che delle vicende della marea atmosferica qualche contezza possa darne il barometro. Accenno su ciò i miei dubbj, perchè se il flusso e riflusso del mare va soggetto a più anomalíe, sembra che queste debban essere numerose a più doppj nell' atmosfera che ne rinchiude una nuova cagione nella sua elasticità. Non può concepir essa movimenti, e scorrere sur una superficie sì disuguale e sparsa d' eminenze, qual è pur la terrestre, senzachè sorgano in essa, dove costipazioni, dove diradamenti, cioè, senza che l' elasticità sua si eserciti e produca effetti sopra modo svariati, che accoppiandosi e incrocicchiandosi con quelli che congiuntameme derivano dallo sbilancio nel peso, rendano pressochè impossibile di rinvenire nelle vicende barometriche qualche legge per cui divenga manifesta l' azion della luna sull' aria.

Ma la digressione comincia a dimenticare la pro-

messa brevità: però, chiudendola, non sia disdetto di oservare che gli astronomi non pretendon già, tutti almeno, di essere, nelle predizioni loro, così infallibili, come il nostro accademico gli dichiara. N' ha tra essi alcuni sinceri non men che dotti, che non esitano a confessare poter benissimo, a motivo principalmente di qualche leggerissima imperfezione tuttavia superstite nelle tavole lunari, e di qualche incertezza nella posizione geografica di alcuni paesi, nel fissare il principio, il fine, la quantità di un eclissi per un certo luogo, trovarsi discordi gli astronomi per differenze di pochi secondi. Poi quand' anche colpissero essi tutti d'accordo nel segno, dalla determinazione precisa e giusta dell' estensione nascostaci dalla lùna della superficie solare, non sarebbe già lecito d' inferirne il grado preciso dell' oscuramento; giacchè se la superficie solare, qual da noi è veduta, nella sembianza di un disco, concepiscasi divisa in parti uguali, da cadauna di queste già non parte verso noi un' eguale illuminazione. Più folta e viva luce c' invíano le parti poste verso il mezzo; scema essa a misura che inoltrasi verso il lembo per un decremento di cui non è nota la legge. In ciò ci si offre un fenomeno malagevole a spiegarsi, anche perchè quelle parti apparentemente uguali non son già tali realmente, e fra esse anzi meno risplendon quelle che confinan col lembo; sebbene sieno esse più estese, e maggior numero contengano di punti lucidi. Plausibile assai sembra la spiegazione recatane in una sua elegantissima lettera da Francesco-María Zanotti, ed esatte l' esperienze per le quali ei mira a mostrare, che come dalla comune fiamma, così probabil-

mente dal sole, la luce non parte già soltanto dalla superficie, ma prorompe eziandio dalle parti situate profondamente nell' interno. D'onde si vede che, siccome porzion più estesa del globo intero corrisponde a que' tratti che rivolti verso noi ne tengono il mezzo, luce più folta debbe a noi giugnerne che non da quelli che quinci e quindi trovansi situati verso il contorno. A taluno potrebbe anche parer verisimile che a rintuzzare la luce scagliata dal lembo del disco sopra quella che parte dal mezzo, debba contribuire il tragitto più lungo di essa a traverso all' atmosfera solare rimpetto a quello dell' altra. Tal altro eziandio riflettendo all' efficacia con cui la nostra atmosfera attutisce lo splendor del sole a misura che questo piega verso il tramonto, potrebbe sospettare che negli annunzj dell'oscuramento dell' ultimo eclisse, non abbiano forse alcuni tenuto conto quanto era mestieri, che il sole trovavasi in quell' incontro, alto assai presso il meridiano, d' onde una sua picciola porzione scoperta illumina quanto l' intero disco presso l' orizzonte. Potrebbe pure aggiugnersi che il sole forse e senza forse non è sempre ugualmente luminoso; e ad immergerci ognora più su questi oggetti ne' dubbj e nell' incertezze, potrebbero fors' anche recarsi le recenti osservazioni e l' idee e congetture del celebre Herschel sulla sede della luce solare, di cui si mostra persuaso che non nel corpo del sole, ma debba piuttosto riporsi nella sua atmosfera, e negli ammassi di sostanze fosforiche sospese in essa e galleggianti e accese di una luce perenne e vivissima, affine, a parer suo, a quella delle aurore boreali, le quali per altro, anche quando lo spettacolo ne è più ma-

magnifico, non ne sono che una languida immagine.

Ma la sobrietà di cui deve pregiarsi un compendio, è omai offesa di troppo dall'intemperanza delle osservazioni a cui il presente è trascorso. Ben più grave offesa peraltro farebbesi alla giustizia, se si omettesse di osservare, che quand' anche ogni ragionamento del nostro collega non fosse in tutto convincente, dello zelo e degli sforzi ingegnosi da lui fatti a difesa degli astronomi, debbon questi sapergli grado, quelli almeno fra essi che non conversano poi tanto cogli astri, che qualche interesse non rechino anche ai giudizj che di lor si fanno in queste nostre basse regioni.

DEL MOVIMENTO RETROGRADO DEL SANGUE, E DELLA FORZA NERVEA.

Non sono mancati mai in addietro, e frequenti pur sono anche al presente quelli che sulla utilità della teoria nell' arti, e più che in ogni altra, in quella di combattere le malattie, professano apertamente una specie di Pirronismo che in alcuni visibilmente confina coll' assoluta incredulità. E perchè gli uomini a grande stento si astengono dal trascorrere negli eccessi, n' ha di quelli eziandio che tengono un linguaggio, per cui sembra che il teorizzare in quest' arte nell' opinion loro coincída quasi col vaneggiare. Se il luogo lo permettesse, non sarebbe cosa punto ardua il mostrare che le così fatte querele ed accuse muovono la più parte da meri equivoci. Vengono in esse a gran torto confusi co' veri teorici i sistematici, de' quali ultimi pur troppo si avvera, che chi non penetra abbastanza adden-

tro, gli sbaglia agevolmente per teorici di prim' ordine e in grado eminente, mentre tutt' all' opposto trovansi essi agli antipodi di questi, e ne sono, se non è disdetto di così esprimersi, le caricature. Certo che su i mali che da essi derivano all' arte mentovata, i saggj hanno giusti motivi di gemere e deplorargli, e che la comparsa in essa di un sistematico può aversi in conto di una vera calamità.

Ma mettendo da parte un confronto a questi tempi alquanto pericoloso, a convincer per ora del loro inganno i detrattori della teoria, gioverà additar loro l' esempio de' vantaggj che ponno ottenersene, offertoci dal celebre Palletta nella nobil memoria chirurgica da lui consegnata a questo volume. Essa sotto il titolo modestissimo di osservazioni chirurgiche risplende per tutto de' lumi della più soda teoria, che manifestamente è concorsa a suggerirgli le correzioni e riforme per lui proposte di alcuni metodi di operare in certi casi gravissimi, adottati dai maestri dell' arte. Benchè applicabili parimente alla Pratica chirurgica e medica sono in gran parte le ricerche meramente teoriche in cui esso entra in un' altra sua produzione ricca di saper fisiologico, e della quale ei permetterà non pertanto, che venga ristretta in un breve compendio; concedendo all' estensore di questo non solo il vantaggio di associarsi con lui nell' esporre al Pubblico le speculazioni rinchiuse in quest' altro suo scritto, ma la libertà eziandio di framezzare all' esposizione alcuni suoi proprj pensieri intorno agli oggetti che verrà successivamente incontrando.

S' intitola esso „ Saggio fisiologico sul movimento

retrogrado del sangue e su quello pure della forza nervea „ dove non si crede inutile d'avvertir tostamente, che l'autore concede al concetto di movimento retrogrado un' estensione piuttosto ampia, e abbraccia in esso molte modificazioni e anomalie del movimento del sangue. Nell' ingresso del suo scritto ei parla onorevolmente e di Erasmo Darwin e dell' opinione adottata da questo, che la linfa nel suo sistema quando viaggi da' rami verso i tronchi, e quando per un vero movimento retrogrado, che si avvicenda coll' altro, dia addietro dai tronchi nei rami verso le radici e le boccuccie estreme, dalle quali anzi esca, de' vasi assorbenti. Ma poichè gli è noto senza dubbio che questa opinione è stata di fresco combattuta vittoriosamente da un prode giovine professore che ha mostrato non esser dessa l'ultimo de' paradossi, quali fisiologici, quali psicologici, de' quali ribocca la troppo rinomata Zoonomia di quest' ardito novatore, *(a)* vuolsi credere assolutamente ch' ei ne faccia menzione per aprirsi una strada ad entrare in ma-

(a) Esempj frequenti assai, e per le conseguenze a cui trar ponno, assai pure pericolosi, incontransi presso questo scrittore, di un coraggio che confina coll' ardimento. Ma qual nome direm noi che competa al capriccio che a lui pure è venuto, di porsi a cantare a prova con Virgilio? Ei cita nella sua zoonomia, là dove parla dell' istinto, il 3°. delle Georgiche; e s' infinge di recarne un passo di ben nove versi, de' quali i due primi soli son di Virgilio; gli altri sette, chi avrebbe sognato mai un sacrilegio tale? è vano il cercargli in esso. Ognuno si accorge che non ponno essere del cigno di Mantova, che dell' autor loro ripeterebbe forse ch' esso ha osato *argutos inter strepere anser olores*. Negli atti d' un' accademia, opera sì grave che non le si permette in niun incontro di rallegrarsi e sorridere, quest' annotazione non è forse in tutto decente: ma forse eziandio la singolarità del caso la rende scusabile.

teria e non per cercare in essa un appoggio al suo assunto. Ben sembrerà forse a taluno, che più autorevoli che non le ipotesi del sistematico inglese, e conformi poi in tutto allo scopo propostosi dal nostro collega, sieno le osservazioni del celebre Cotunnio sul movimento con perpetua vicenda quando diretto e quando retrogrado del sangue nelle vene cerebrali.

E a proposito di quest' ultimo fenomeno, la scoperta di esso non può dirsi in tutto nuova: altri già tempo lo aveva avvertito, ma niuno non lo aveva peranche osservato e descritto con accuratezza pari a quella del grande fisiologo di Napoli, il qual ne reca una sua spiegazione nuova e ingegnosa e degna della sagacità per cui egli aprendosi nuove strade e allargando i confini della scienza, si mostra sempre profondo e originale. Un tal carattere si ravvisa anche in questa spiegazione, sopra della quale gli si chiede non pertanto licenza di fare una o due riflessioni. Ei si è assicurato con reiterate osservazioni istituite e su i bruti e sull' uomo, che nel periodo della inspirazione, il sangue ne' seni della dura madre, *(b)* nel longitudinale a cagion

---

(b) Per non abusare all' eccesso della licenza chiesta dall' estensor dell' estratto, d' inserire fra i sentimenti altrui qualche sua riflessione, ei risolve di collocarne una nella Nota presente, suggeritagli dalla menzione che quì si fa dei seni della dura madre. Come nell' architettar questi seni la natura si è manifestamente scostata dal disegno da essa adottato pel resto del sistema sanguigno, così del sangue in essi raccolto sembra lecito il dire che a certi riguardi esso rimane sottratto alle leggi che nel resto del corpo reggono il circolo. Numerosi son questi seni, e a motivo della scambievole loro communicazione tutti consentono a formare una specie di lago, in cui per l' una parte il sangue versatovi dalle vene non incontra resistenze, e per l' altra non è punto a temere ch' esso vi si arresti e ri-

d' esempio, recasi regolarmente, seguendo la natural sua direzione, alle vene jugulari interne, e da queste al tronco della cava superiore; che all' opposto nel periodo della espirazione e in quello che separa questa dalla successiva inspirazione, il sangue in quel seno dà addietro e lo scuote con una specie di palpito o polso; e che anzi se venga esso ferito, ne sgorga a salti sincroni al polso arterioso e alle battute del cuore. Tale è il fenomeno che trattasi di spiegare. Nel farlo il chiarissimo professore di Napoli scostasi assai dall' idee comunemente adottate sul corso del sangue venoso a traverso l' atrio destro del cuore. Di questo sangue egli opina che non si scarichi tutto simultaneamente nel destro ventricolo di questo viscere, ma che l' ingresso della colonna versata nell' atrio dalla vena cava inferiore

stagni, e impaludi. A un sinistro tale si oppone efficacemente la facilità con cui può questo sangue scaricarsi nelle vene jugulari interne, verso le quali lo invita la deplezione che ad esse sopravviene ad ogni battuta di cuore, cioè ad ogni diastole del seno e dell' orecchietta destra; la qual deplezione divien più notabile nel periodo della inspirazione. Nell'atto stesso, di questo sangue si avvera ch' esso dentro i seni può muoversi per ogni verso e scorrere agevolmente a norma delle posizioni del capo, e di ogni altra circostanza, quando dalla destra alla sinistra, e quando da questa a quella, e dall' innanzi all' indietro, e dall' indietro all' innanzi. Queste particolarità sembra che svelino in parte le vedute e intenzioni della natura, per quanto è lecito al nostro corto intendimento di penetrarne l' arcano. Si osservi in fatti che molto sangue necessario senza dubbio agli usi dell' Encefalo doveva giugnere all' interno del cranio; qual vi recano in realtà le carotidi interne e le vertebrali: che la delicatezza dell' organo, per entro il quale diramansi le arterie cerebrali, richiedeva che a scemar l' urto del sangue rinchiuso, fossero esse men robuste nelle pareti, che in qualsisiasi altra region del corpo; e tali appunto esse sono: che all' uso di sostenere in movimento il sangue, e incalzarlo e affrettarlo a traverso l' Encefalo, non era possibile di applicare acconciamente l' azion musculare e le compressioni, che tante altre parti ne soffrono impunemente, e dalle

si avvicendi con quello della colonna che all'atrio pur giugne per la cava superiore. Entra questa nel periodo dell' inspirazione; la prima in quello dell' espirazione e nella pausa frapposta a questo e all'altro periodo; in somma a torace ristretto. A simultanei cangiamenti va soggetta, a parer suo, la capacità di quell'atrio. Sotto l' espirazione l' atrio sinistro del cuore è rigonfio di sangue versatovi in maggior copia dalle vene polmonari, verso le quali si affretta, ed è spremuto in esse, per così dire, dal polmone che si restringe. Per una conseguenza di questa distensione, il Setto comune ai due atrj ne è spinto entro il destro che può in tale incontro concepirsi diviso in due cavità, inferior l'una, a cui appartiene l'apertura per cui quest'atrio comunica col ventricolo destro del cuore, nel qual però

---

quali era giuocoforza difenderlo, attorniandolo della scatola ossea del cranio. Quinci si scorge che agevolmente potevano sorgere nel sistema cerebrale congestioni e arresti di sangue, con danno gravissimo di un viscere sì essenziale per l' un verso alla vita, e per l' altro sì opportuno alle offese. A un pericolo tale si fa incontro efficacemente l' unione de' seni della dura madre. In essi il sangue venoso ha uno spedito e facile ingresso; e libera ne è pure e pronta l' uscita ne' tronchi jugulari. Della facilità con cui il sangue è ammesso in questi seni, e gli attraversa, si accorge e si giova quello che gli tien dietro nel resto de' vasi cerebrali. Che se in qualche incontro copia alquanto eccessiva di sangue venga a raccogliersi in questi seni communicanti, come è detto, tutti assieme, essa si allargherà tosto equabilmente per l' intera loro capacità; e la pressione che ne giugnerà alle parti adjacenti dell' Encefalo distribuendosi sur una superficie estesa assai, riescirà minima sopra cadaun punto della medesima. Così vengon rimossi o scemati di molto i pericoli. Qualche ragionevolezza si ravviserà forse in queste idee, le quali quand' anche non sieno in tutto nuove, si osa dire che presentate e riunite sotto un sol punto di vista non s' incontrano presso veruno; e chi le adotterà sarà pure disposto ad inferirne che le anomalie offertecci dal sangue venoso cerebrale derivano da condizioni che palesemente le restringono a questa special regione del corpo.

entra liberamente il sangue della cava inferiore; superior l' altra, in cui, finchè dura questo stato di cose, trattiensi il sangue che piòmbavi dalla cava superiore; nè solo vi si arresta, ma collo stimolare la parte superiore dell' orecchietta destra, ne è dalla contrazione di questa respinto all'indietro e all'insù, per un movimento retrogrado che giugnendo fino ai seni della dura madre, e a norma delle contrazioni e delle pause dell' orecchietta alternando col diretto, scuote que' seni, e ove sieno feriti, ne lancia fuori il sangue a salti, come osservasi nell' arterioso. Tutto cangia nel periodo dell' inspirazione. In questo meno sangue giugne all' atrio sinistro del cuore che non essendo più sì turgido come dianzi, non obbliga più come dianzi, il comun Setto a sporgere entro la capacità del destro e a dividerla in due. Dileguasi questa separazione, e il sangue della cava superiore si precipita verso l' apertura del destro ventricolo del cuore, in cui entra con impeto tale, che il sangue della cava inferiore è costretto o in tutto o in gran parte a soffermarsi e aspettare che colla successiva espirazione risorgano le circostanze di prima. A questa succinta esposizione delle idee dell' illustre accademico di Napoli il dovere ne impone di aggiugnere, ch' egli attenendosi a quel metodo sopra ogni altro legittimo di teorizzare, di cui a' dì nostri sembra che divengano ognor più rari gli esempj, procaccia alle stesse un appoggio nell'esame degli organi cui il sangue attraversa; delle forze reali da essi possedute; della reciproca lor dependenza, e de' cangiamenti pure che a suo avviso alla conformazion loro sopravvengono inevitabilmente nell' atto di agire.

E non pertanto è desso pregato a permettere che gli vengan proposti alcuni dubbj.

Dal concorrere alla produzione del fenomeno sopra descritto egli esclude il cuore, e lo sterno pure, del qual ultimo taluno potrebbe congetturare, che abbassandosi nell'espirazione, potesse premere l'atrio destro del cuore e obbligarne il sangue a retrocedere verso l'alto. Si arresta egli alquanto a lungo a mostrare che niuna parte può in ciò avere lo sterno, e senza dubbio riesce egregiamente all'intento. Ma del cuore si contenta di affermarlo. E pure chi ponga mente che per confession sua i movimenti retrogradi del sangue, le scosse del seno longitudinale, i salti del sangue che per avventura ne sgorghi, coincidono col polso arterioso, davvero che non potrà in lui non sorger qualche sospetto del concorso e influsso del cuore.

Benchè la coincidenza pur or notata ne suggerisce un'altra riflessione, anch' essa di qualche momento. Ci s'insegna che nel periodo dell'espirazione il sangue dalla superior cava recato all'atrio destro non potendo passar oltre, si arresta a stimolare la parte superiore dell'orecchietta destra, che contraendosi, lo fa retrocedere verso l'alto. Congiuntamente il sangue della cava inferiore entra liberamente nel ventricolo destro, spintovi senza dubbio dalla contrazione della parte inferiore irritabile quanto la superiore della stessa orecchietta. Non ponno dunque non esser sincrone queste contrazioni di uno stesso cavo diviso in due, ma stimolato egualmente e simultaneamente in entrambi. Dovrebbe dunque la retrocessione del sangue verso l'alto, il tumor de'seni, l'uscita da questi a salti del san-

gue avvicendarsi, e non già, come si osserva, coincidere col polso arterioso.

D' altra parte non ha quasi dubbio che il cuore, o sia il suo ventricolo destro, a cui nel caso attuale giova restringersi, nell' atto che si sgrava nella sistole di parte del suo sangue nell' arteria polmonale, parte anche non ne respinga all' indietro per l' apertura venosa nel suo atrio destro. Come dubitarne, se per l'una parte questo sangue non può non cedere quinci e quindi, e se per l' altra l'anello delle valvole tricuspidali non può nel sollevarsi, non ispingerne parte avanti a se, primachè collo stendersi innanzi a quell' apertura e chiuderla, giunga ad intercettarne in tutto l' uscita?

Or questo sangue non può non urtar quello che trovasi in quell'atrio, e vi giunge pe' tronchi venosi, e imprimere in esso un movimento in direzione opposta a quella in cui vi giugne. Sembra dunque che tutto si riduca a mostrare come quest' ultimo effetto debba esser maggiore e sensibile nel periodo dell' espirazione, poco o nulla sensibile in quello dell' inspirazione. Non si penerà a comprenderlo, ove si avverta che nell' espirazione il sangue entra con qualche stento nel polmone ristretto, che con qualche stento l' arteria polmonale lo riceve dal cuore, il quale nello sgravarsene ne respingerà dunque all' indietro porzion maggiore. Chi ha presente con quale rapidità l' urto propaghisi pe' fluidi continui e incompressibili, non durerà fatica a concepire come gli effetti dell' urto possano in tale incontro giugnere fino ai seni della dura madre. Ma v' ha di più: perchè congiuntamente alla compressione eser-

citata dal torace nella espirazione sul polmone, partecipano anche i gran tronchi delle vene cave, ne' quali però con più stento si sgravano i loro rami, compresi i cerebrali, che saranno costretti a intumidire, cosicchè non è a stupire che un urto, come si è avvertito, maggiore, giugnendo a' vasi già distesi alquanto e rigonfj, riesca più sensibile ne' suoi effetti, e imprima al sangue rinchiuso un vero movimento retrogrado. Non è punto mestieri d'avvertire che mancando l'accennate condizioni all'inspirazione, non occorre aspettarne effetti conformi. Si augura a queste poche riflessioni, che il dottissimo professore di Napoli non le trovi in tutto indegne di qualche attenzione.

Ma il nostro collega potrebbe omai cominciare a dolersi di essere dimenticato. Però ad esso tornando, vuolsi avvertir tostamente ch' ei giovasi assai e trova i dati opportuni al suo uopo presso i due sommi sperimentatori Haller e Spallanzani, ch' ei cita spesso, recando peraltro sempre all' uso ch' ei fa dell' osservazioni loro la critica più esatta, e ad esse accoppiando le proprie offertegli, quali dalla Pratica chirurgica, quali dalla notomia, entrambe da lui possedute in grado eminente. Ei trova esempj frequenti di movimento retrogrado tanto nel sangue arterioso che nel venoso. Intorno a che gli si chiede licenza di osservare di nuovo ch' egli usa il termine di retrogrado in un senso alquanto ampio, e tale che, oltre alla reale retrocessione del fluido nell' arterie dai rami nei tronchi, nelle vene dai tronchi nei rami, abbracci molte anomalie inevitabili in un sistema sì multiplice, qual è pur quello de' vasi delle macchine viventi. Egli per mo' d' esem-

pio, si arresta alquanto a lungo sulle anastomòsi, e tien lor dietro con molta diligenza per l'arterie e per le vene; e perchè di questi canali di comunicazion reciproca tra un vaso e l'altro non ha dubbio che il fluido entro di essi non muovasi, quando in un senso, quando nell' opposto, a norma delle circostanze e degl' inciampi che incontra nel recarsi alle parti, ei dice che le anastomòsi servono ai movimenti retrogradi. E in realtà questo concetto sembra assai ragionevole, non che ne' casi speciali notati dal nostro collega, come quando il sangue è svíato dalle parti occupate da infiammazione, o quando incontra veri ostacoli prodotti da pressione sofferta da certi vasi; ma tale esso pur sembra, considerando l' affare sotto un punto di vista più generale. In questo aspetto sonosi offerte le anastomòsi all' autor d' un opuscolo inserito nel tomo ottavo della Raccolta milanese, e l' estensore del presente estratto, che forma un tutto col detto autore, risguarda come una sventura di quell' opuscolo, che il nostro collega non lo abbia veduto. Esso nell'esporre un nuovo uso, e sopra ogni altro importante, delle anastomòsi, è condotto ad osservare che laddove cominciano esse a spesseggiare per modo che il sistema de' vasi trasformasi in una specie di maglia, il sangue nell' avvolgersi per entro alle stesse, non può non esserne trattenuto nel suo viaggio, per modo che mentre nell' arterie una porzion di esso inoltra verso le estremità del sistema, un' altra porzion se ne scosta per movimenti che assumono il carattere di retrogradi, nel senso massime alquanto ampio dato a un tal termine dal nostro collega. Questi, come si è, non ha guari, accennato, del soccorso del-

le anastomòsi si vale egregiamente a render ragione di parecchj fenomeni naturali e morbosi del corpo, che trovando ne' movimenti retrogradi ch' esse permettono al sangue, un' acconcia spiegazione, divengono una conferma della loro realità ed esistenza. Alle prove di questi movimenti per lui tratte dall' ordine che presiede alla diramazione delle arterie, altre ei ne aggiugne offertegli dalla considerazione della loro struttura ed azione sul sangue. La loro contrattilità, e meglio che non questa, la loro forza vitale dovuta alla presenza delle fibre carnee e nervee, le rende capaci di agir sul sangue di una guisa a parer suo, almeno ei non esita ad avventurar questo sospetto, conforme a quella de' canali dotati di un vero movimento peristaltico, che trasformandosi in certi incontri in antiperistaltico, spinga il sangue a ritroso dell' ordinaria sua direzione.

Prove favorevoli al suo assunto gli presenta forse in maggior numero il sistema venoso; dove in realtà, battendo il sangue strade più lontane dal cuore, ragion vuole che più frequenti sieno gli esempj come di altre anomalie, così di movimenti retrogradi; de' quali chi peraltro vorrà porgli fra l' anomalìe, se nascendo conseguentemente alla costituzion del sistema, il carattere in essi si ravvisa di effetti conformi all' intenzioni della natura? Per tutto di essi nelle vene gli si fanno incontro i motivi, le cagioni, gli esempj. Ei gli trova nella dovizia delle anastomòsi, di cui son ricche quanto, e più delle arterie; nel sistema cerebrale che negli abbassamenti e nell' intumescenze dell' encefalo compagne de' periodi del respiro ne offre non equivoci indizj; nella vena porta e nelle radici abdominali di que-

sta, nelle quali quanto agevolmente il sangue dia addietro ben lo provano le affezioni emorroidarie; nel funicolo spermatico e nella frequenza a questo familiare della dilatazione varicosa delle sue vene; nel sistema venoso uterino, nel quale, giovandosi egli dell' osservazioni dell' Hunter, ravvisa singolarità tali che lo guidano a congetturare che ai corsi lunari concorrano essenzialmente quelle appendici venose, che col nome di seni descrive l'anatomico inglese, per un movimento del sangue, a cui non manchi il carattere di retrogrado; per ultimo nella facilità, con cui, secondo Haller e Spallanzani, il sangue trattenuto in una vena da un ostacolo insormontabile, come da un vincolo che la stringa, non si affolla già in quella vena, nè la dilata, ma sviandosene e retrocedendo seguita il suo viaggio pe' vasi con essa comunicanti.

Nè dal riconoscere nel sangue delle vene movimenti retrogradi lo sgomentan punto le valvole proprie di esse; poichè di queste egli osserva primamente, che non s' incontran già esse per ogni dove nel sistema venoso; nè mancano, a cagion d' esempio, le vene tutte, che ricercano internamente le viscere. Poi là dove esistono, sostengono bensì il sangue, e concorrono a mantenerne il corso nella natural direzione; ma non al segno ne con tale accuratezza che gli vietino sempre di retrocedere. E a proposito di valvole, giacchè gli si è chiesta licenza, e si spera d' averla ottenuta, d' interporre al ragguaglio qualche osservazione propria dell' estensore, non sembra disdetto di avvertire che le valvole venose accompagnano fedelmente il sistema de' muscoli volontarj. Questa combinazione sembra avvi-

sarne che l' uso loro precipuo è strettamente congiunto coll' azion muscolare. De' muscoli è noto ch' essi nell' agire affrettano a guisa di sprone il corso del sangue. Meglio che non l' arterie sembran le vene opportune a provar quest' azione; il vantaggio della quale per altro anche in esse ridurrebbesi a poco, ove fosser prive di valvole. I muscoli coll' intumidire e premer le vene frapposte, ne spingerebbero egualmente il sangue all' innanzi e all' indietro; laddove le valvole coll' occupar parte del lume, rendon più malagevole il regresso del fluido, e la pressione ne diviene più efficace ed utile all' uopo di affrettarne il corso, secondo la natural sua direzione.

Che le valvole non vietino ne in tutto ne sempre al sangue di retrocedere, il nostro collega lo inferisce anche dagli effetti che accompagnano i comuni salassi. Questi nell' accorrimento del sangue verso il foro dalle parti più o men vicine, e nelle due correnti, conforme l' una, opposta l' altra alla natural direzione, che per solito concorrono visibilmente a formare il getto, attestano l' esistenza de' movimenti retrogradi, su i quali ei si arresta, non allo scopo solo di rafforzare di ulteriori prove il suo assunto, ma per trarne eziandio conseguenze, onde rischiarare la teoria di uno degli effetti più importanti del salasso, di quello vale a dire detto derivazione, per cui si mira ad invitare il sangue a recarsi a certe parti o a distoglierlo da certe altre, ciò che dicesi revulsione; e per una conseguenza di questi rischiaramenti offrire al Pratico qualche norma nella prescrizione e nell' uso di questo sovrano presidio.

Ne solo nel sistema sanguigno gli si presentano

esempj in folla di movimenti retrogradi; ma ei gli rinviene eziandio nelle strade battute da certi umori ottenuti per secrezione, come nella bile destinata a muoversi, quando in un senso, quando nell' opposto, pel Condotto colèdoco, e quando ad entrare, quando ad uscire dalla cistide: nel liquor fecondante, nel latte stesso raccolto nella mammella, di cui, quando il succhiamento lo invita verso il capezzolo, a lui sembra che assuma l'aspetto di movimento retrogrado. In somma, a fin di restringere le molte in poco, e raccoglier tutto in una proposizion generale, il dottissimo Palletta sembra d' avviso essere i movimenti retrogradi sì numerosi e frequenti che non debbano aversi in conto di mere irregolarità ed eccezioni, ma che nel complesso loro costituiscano una specie di legge meno estesa per vero dire e meno autorevole che non quella che presiede ai movimenti diretti, ma tale non pertanto che meriti l' attenzion del Fisiologo, e servir possa acconciamente alla spiegazione di molti fenomeni animali.

Nella seconda parte del suo lavoro il nostro accademico si propone mire più ardue ed elevate. Ei fissa e arresta lo sguardo sul sistema de' nervi; e in questo a traverso alla nebbia, di cui più che altrove quì la natura si avvolge, scorge fenomeni che lo guidano ad ammettere movimenti retrogradi della forza nervea, o sia, giacchè astenendosi egli con lodevol cautela dal pronunziar nulla sulla natura di detta forza, sembra lecito d' interpretare le sue espressioni, ad ammettere che l' energia de' nervi e l' azion di questa si dispieghi ed eserciti in opposte direzioni. Alle sue riflessioni serve d' appoggio un gran fatto, su cui tutti sono d' ac-

cordo: ed è, che le commozioni de' nervi accompagnate da sensazione e percezione scorrono lungo i nervi stessi dalle parti all' encefalo, e che all' opposto dall' encefalo ai muscoli giungono pe' nervi gli ordini dell' anima nell' esercizio de' movimenti volontarj. E perchè di questi ultimi nervi non è a dubitare che non sieno forniti di senso, delle due commozioni di cui sono capaci, o l'una o l' altra potrà aversi in conto di retrograda. E a fine di mostrare ognora meglio la ragionevolezza di questo concetto, ei soffermasi alquanto nella considerazion dell' encefalo, e in esso riconosce co' Fisiologi più reputati la facoltà di reagire su' nervi che gli recano le impressioni qualunque, e di concorrere conseguentemente alle funzioni delle parti, donde quelle impressioni derivano; e in esso pure, e nel recondito e sublime artificio, con cui entro la sua sostanza s'intrecciano l'origini nervee, ei ravvisa la sorgente di molti di que' consensi, pe' quali le parti simpatizzano assieme, quali più, quali meno, per differenze, di cui sembra lecito di sospettare che abbiano un vincolo stretto assai con gli usi diversi delle parti medesime. *(c)*

(c) Se per l' una parte niente è si noto nè da tanto tempo, quanto che per una vera legge che non cede nell' autorità e nell' influsso a niun' altra di quelle che governano l' economia animale, nelle macchine viventi le parti loro diverse consentono a formare un tutto, a motivo anche del modo con cui esse simpatizzano assieme, di che si avvidero fino i medici de' remotissimi tempi e della scuola e prosapia di Esculapio; per l' altra sembra che non siasi tenuto conto abbastanza di alcune notabili modificazioni di questa legge, che servir ponno come di gradi, onde scendere e accostarsi alla spiegazione di molti fenomeni speciali, a norma di quel metodo di ragionare che sopra ogni altro merita di essere mantenuto in onore presso i Fisici. Tra queste modificazioni un luogo cospicuo sembra do-

Ben nel versare su quest' articolo del consenso reciproco delle parti, nell' atto che su' fenomeni che ne nascono si mostra pronto ad ammettere l' influsso dell' encefalo, ei non esita ad accostarsi anche a que' teorici che ad interpretargli impiegano le unioni sì frequenti e numerose e svariate che ci si fanno incontro per ogni dove, chi accompagni i nervi nel loro viaggio pel corpo. Egli anzi giovandosi delle osservazioni sulla notomia sottile de' nervi, e proprie e altrui,

---

vuto a quella di cui è fatto cenno nel Testo. Fra gli organi che cospirano assieme a servire ad una certa specie di funzioni, regna visibilmente un consenso più stretto che non fra quelli che servono a funzioni diverse. Veggasi come la grande strada degli alimenti consenta tutta con se medesima, e ogni sua regione si accorga di ciò che sopravviene ad altre anche non poco distanti. Nel sistema uropeo dell' esistenza d' un calcoletto nella pelvi del Rene e nelle strette dell' Urerère risentesi spesso l' ùretra e l' estremo di questa; e all' opposto l' irritazione dell' ùretra e del collo della vescica giugne al Rene e ne aumenta l' azione, e con questa la secrezion dell' orina. In quel del respiro, a chi non è noto che l' irritazione dell' interno delle narici può con tal forza trarre in consenso i muscoli che attorniano il petto, che nello starnuto ad un' ampia inspirazione tenga dietro un' espirazione rapida e veemente a un segno che sembra convulsiva, e potrebbe sbagliarsi per tale, chi non rifletta che in tal incontro i muscoli che la effettuano, non sono in tutto, come nelle vere convulsioni, sottratti al dominio della volontà? Che anche il gran filtro della traspirazione insensibile ascolti la legge, di cui parliamo, pare fra le altre prove, che ce ne assicuri l' efficacia, con cui i vescicanti, comechè applicati a ristretta porzion della cute, hanno forza di mantenere su di essa copiosi estesamente gli esantemi proprii delle malattie febbrili eruttive; di rialzarli, se depressi; se scomparsi, di richiamarveli: e ce lo addita pure il pericolo e il danno per cui, massime in chi dorme, il freddo sofferto da una parte avvegnachè non ampia del corpo rimasta per avventura scoperta, arresta questa escrezione in quelle anche, che trovansi d' altronde bastevolmente difese. Anche del sistema vitale, o sia di quello nel cui centro sta il cuore, de' vasi, del sangue, del circolo, è forse lecito il dire che ogni sua regione consenta strettamente e coll' altre e col centro; d' onde, attesi anche i vincoli che

e sopra l' altre di quelle di Monrò, entra nell' enumerazione delle foggie diverse di queste unioni, notando le particolarità che le distinguono, ne' Plessi, nelle Anastomòsi, negl' Innesti, ne' Ganglj. E per vero dire con esse sembra che la natura stessa ne ammonisca che l' intenzion sua è stata di annodare assieme le parti cogl' istrumenti principali d' ogni funzione animale, mettendole così in istato di agir l' une sull' altre; la quale azione essendo reciproca e dovendo effettuarsi lungo

---

ha desso col resto del corpo, derivi che sia sì frequente in esso e pronto a sorgere quel particolar aumento dell' azion sua, nel qnale chi sa che non debba riporsi l' essenza della febbre? e ch'esso si accorga per così dire delle congestioni, ovunque esse nascano, d'indole, come suol dirsi, infiammatoria, delle quali la febbre è pressochè indivisibil compagna. Benchè a proposito di questa e del sistema vitale, esso nel diramarsi pel corpo, e nel ricercarne intimamente le parti tutte, non sembra dalla gran legge del consenso, congiunto a tutte egualmente, ma più con alcune che con altre, come a cagion d'esempio, meglio che con qualunque altro filtro, con quello di cui si è fatta poc' anzi menzione, del Traspirato insensibile; escrezione principalissima, di cui era ben giusto che nelle frequenti alterazioni, a cui va soggetta, il sistema vitale accorresse a rassettar l' organo, in cui essa si effettua, posto sull' àmbito del corpo. D'onde s' intende come gl' infreddamenti o come suol dirsi, le costipazioni della pelle, se non risveglian sempre febbre vera, siano per altro accompagnate da brividi che alternan col caldo, e da altri sintomi che confinano co' febbrili.

Ma quì, giacchè dai consensi che passano fra parti destinate ad usi comuni, si è trascorso ad accennarne altri ne' quali non si ravvisa a rigore questo carattere, si chiede licenza di toccarne di volo uno degno quanto niun altro di essere avvertito, quello vale a dire, per cui la sapienza della natura ha voluto che il ventricolo simpatizzi, per così dire, con tutto il corpo. Di questo viscere destinato a ricevere e a trattenere entro se gli alimenti, ragion voleva ch' esso secondo le circostanze diverse della macchina si avvedesse se doveva o ammettergli o rifiutargli. Doveva esso dunque per un consenso estesissimo accorgersi dello stato del corpo; ed esso in fatti è provveduto, massime nel suo orificio superiore, di un cotal senso, che a guisa di portinajo lo ammonisce de' pericoli a cui potrebbe esporre il corpo intero l' uso improvido de' cibi. E perchè i consensi sono

gli stessi nervi, nel trascorrimento di quel qualunque principio attivo ed energico che gli anima, siamo quasi necessariamente guidati ad ammettere col nostro collega movimenti retrogradi. A questa stessa conchiusione esso giugne, facendosi a considerare certi gravi vizj de' nervi, pe' quali dovrebbero rimaner colpite di paralisi perfetta le parti che gli ricevono; il che spesso non accade, perchè a queste giugne soccorso di forza nervea col mezzo di fibre e di rami che inferiormen-

---

sempre reciproci, quinci anche si scorge come del benessere del ventricolo giovisi il corpo intero, intantochè se quel viscere sia vigoroso, soggetti di costituzione nel resto men che robusta veggansi conservarsi sani a lungo e giugnere alla decrepitezza; e quinci pure si vede che per quanto sia lodevole la sobrietà ne' cibi, ad ogni modo nel vigor della età può riuscir utile l'accordargli allo stomaco con qualche liberalità; giacchè per l'una parte niente tanto concorre a rafforzar gli organi qualunque, quanto un mediocre esercizio, e per l'altra del vigor del ventricolo farà suo profitto l'intero corpo.

Chi sa che dependentemente dall'influsso di questo viscere, come su tutte le parti, così sull'encefalo, non accada che certe sostanze scevre d'ogni acrimonia, blande anzi e miti in grado eminente, le emulsioni a cagion d'esempio, il latte stesso, ricevute entro di esso, coll'accarezzarne lenemente le papille nervee, di cui è desso quanto e sopra forse ogni altra parte nel suo interno gremito, inducano ne' nervi un tal rallentamento, che recato fino all'encefalo e al sensorio comune, inviti questo, e lo disponga a comporsi in quello stato di calma, che non può non sorgere in esso senza che sorga congiuntamente una certa inclinazione a dormire. Così è forse lecito d'interpretare la facoltà un tal poco sonnifera manifestata in qualche incontro dal latte; ne' soggetti massime, di che ci si offre un esempio famoso nel fatto di Sisara, stanchi e accesi a un tempo e agitati, ne' quali a tranquillarli, sedando prontamente l'orgasmo, sembra che contribuir possa l'agire direttamente con un soccorso tale sopra quell'organo, che meglio d'ogni altro consente col corpo intero.

Forse gioverebbe eziandio all'intelligenza di molti fenomeni animali il conoscere i vincoli, pe' quali la gran legge del consenso s'inanella e in più incontri s'incorpora con quella che nelle macchine viventi dà, com'è noto, all'abitudine un potere sì illimitato. Di queste due leggi sembra che

te al vizio associandosi al nervo offeso, parton da' tronchi immuni da difetto. Ma è questo un luogo sì tenebroso, che avvisatamente senza dubbio il dottissimo sig. Palletta su di esso trattiensi assai meno che sull' altro del sangue; nel che converrà imitarlo, e chiudere omai un compendio, l' estensor del quale assoggetta al giudizio del suo egregio collega le riflessioni, di cui si è fatto lecito di allungarlo, nella fiducia che non possa dispiacergli ch' ei siasi messo a conversare con esso lui intorno ad oggetti appartenenti a studj comuni ad entrambi.

---

il consenso dia in più incontri il primo urto all' abitudine; e che questa allargando, per così dire, ognora più le strade di reciproca comunicazione fra le parti, ne avvalori il consenso. Benchè della forza pressochè irresistibile che tutti consentono ad accordare all' abitudine, gioverebbe forse cercare la sorgente e i fini e i motivi, che saranno senza dubbio degni della provvidenza ineffabile della natura, e vorranno riporsi in qualche grande vantaggio che ne derivi all' esercizio delle azioni proprie degli Esseri vivi. Intorno a che si fissi di grazia lo sguardo sull' abile suonatore di cembalo nell' atto ch' esso tocca questo strumento. Direm noi che l' attual riflessione ne accompagni e guidi le dita ne' successivi loro rapidissimi trasporti da un tasto all' altro? Eh che ognun sa che l' abitudine previene e rende soverchia la riflessione, che anzi tutto turberebbe. Si applichi quest' esempio all' azioni tutte della vita dependenti dalla volontà, alle più comuni; a quella, per dir di una sola, complicatissima del favellare. Le determinazioni della volontà stanno alla testa di quella serie di movimenti, per cui queste azioni si effettuano; la successione rapidissima degli stessi è consegnata all' abitudine, che per vincoli, de' quali la natura ha serbato a se sola il segreto, interviene in ogn' incontro a produrgli con una rapidità e precisione che adegua quella dell' azioni figlie dell' istinto. Poichè dunque il concorso assiduo dell' abitudine all' azioni della vita era indispensabile, somma pur ne doveva esser la forza; e il lagnarsene a motivo degl' inconvenienti non rari che ne nascono, sarebbe lo stesso che il pretendere che la natura avesse dovuto rinunziare ai vantaggj senza confronto maggiori, che ne derivano.

OSSERVAZIONI CHIMICO-GALVANICHE.

Non sia disdetto d' inserir pure fra questi Estratti quello di una nobil memoria chimica divenuta per vero dire, a motivo della stampa fattane, di ragione del Pubblico, ma che non cessa per questo d'essere di ragione dell'Istituto. Avvolgesi essa intorno a un argomento che sopra forse ogni altro a' dì nostri tiene rivolta verso di se l'industria de' Fisici e de' Chimici commossi e accesi, e a fin di usare un traslato che in questo incontro appena è tale, elettrizzati per così dire dalle scoperte immortali di Galvani e di Volta. Fra esse quella del piliere d' invenzione di quest' ultimo è stata accolta con un entusiasmo di cui in niuna forse delle sue epoche lo studio della natura non ci presenta un esempio uguale. Basti il dire che tanti sono entrati nella carriera schiusa loro d' innanzi da questo strumento, e lo studio ne ferve a un segno per tutta Europa, che la copia de' materiali raccolti nel breve giro di pochi anni ha messo in istato un valoroso e zelante Franzese di tesserne e pubblicarne la storia. Però non è a stupire che il nostro collega Brugnatelli siasi affrettato di prender posto fra i Pfaff, gli Humbold, i Ritter; e frutto delle sue fatiche è uno Scritto, per lui, è omai qualche tempo, offerto all' Istituto che di buon grado gli accordò di poter colla stampa farsi incontro al risico d' essere prevenuto nella pubblicazione delle sue scoperte.

Di queste in fatti la Memoria si adorna per tutto, e là dove produce osservazioni in tutto nuove, e

là dove le altruí appura e rettifica; e quando narra sperienze che schiudon l' adito a vedute importanti, e quando o convince di errore, o restringe entro più giusti confini le conchiusioni a cui altri era giunto. Egli a cagion d' esempio, nel primo articolo della stessa, dopo di aver confermata la bella, e quanto niun' altra, interessante osservazione del sig. Simon di Berlino, che il primo della formazione si avvide dell' Acido Muriatico *(d)* nell' acqua, cui attraversi la Corrente elettrica guidatavi da un filo d' oro comunicante col polo positivo del piliere, passa a mostrare che a torto il fortunato autore di questa scoperta si arrestò a mezzo cammino, trattenuto dal sospetto, che della comparsa di quell' acido dovessro accagionarsi le sostanze animali da lui impiegate, e per l' una parte richieste a mantener l' acqua nel tubo, e incapaci per l' altra d' interrompere il circolo e la comunicazion necessaria fra gli Estremi del piliere. E perchè da un sospetto tale non vanno immuni i tentativi, pe' quali il ch. sig. Pacchiani confermò il primo in Italia la scoperta del Chimico di Berlino, giacchè anch' egli di sostanze animali o vegetabili si valse a mantener rinchiusa ne' tubi l' acqua su cui operava l' elettricità del polo positivo, il nostro col-

---

(d) Il compendiatore si prende la sicurtà e ne chiede licenza al dottissimo collega, di valersi della nuova chimica nomenclatura, quale uscì dai Francesi. Con ciò ei non intende di preferirla alla riforma propostane dall' autore dell' opuscolo compendiato, e in questo anzi adottata. Ei non si arroga di pronunziare fra l' una e l' altra. L' opera d' altronde in cui il sunto trovasi inserito, lo ammonisce dell' obbligo di osservare una perfetta neutralità; e questa ei crede di mostrarla, scegliendo il linguaggio usato dai più, e protestando che quest' unico motivo lo determina a sceglierlo.

lega, con un suo apparecchio che toglie di mezzo ogni dubbio, ne rende certi che senza il concorso e il soccorso di niuna sostanza animale o vegetabile, ottiensi la produzione nell' acqua dell' acido muriatico o semplice o ossigenato.

Osserva indi egli acutamente, volgendosi al sig. Kruiskank, che conformemente alle osservazioni di questo prode Chimico, l'acido di cui trattasi, fa più prontamente mostra di se nella soluzione del muriato di soda, e non che in questa, ma in quelle pure de' muriati di potassa, di ammoniaca, e meglio anche, di quello di calce, a motivo della scarsezza dell' acqua richiesta ad ottener dette soluzioni, e della maggior deferenza che rende, come più rapido, così più efficace il trascorrimento per esse dell' agente elettrico. Aggiungono a queste conchiusioni peso e valore altri effetti analoghi da lui ottenuti col mentovato apparecchio; quello a cagion d' esempio, per cui ei riesce colla pila a trasformare in acqua regia l'acido muriatico semplice; e quello di neutralizzare una soluzione lunga di soda; e quello, per cui, cangiando il filo d' oro in uno di ferro, ottenne un muriato marziale, che staccandosi dall' acqua filtrata in forma di un bianco Precipitato, colorossi in azzurro col Prussiato di potassa, annerì colla tintura di galla. Ottenne egli pure un muriato di calce dalla soluzione di questa, e ne lo assicurò non l' acido dello zucchero, che a norma di altre sue osservazioni si mostrò un criterio alquanto infedele della presenza della calce, ma sibbene la potassa.

Per ultimo in questo articolo ricco per ogni dove di fatti e di riflessioni, ei ne informa di aver dovuto

rinunziare all' opinione in cui era, che l' affinità coll' ossigene de' metalli impiegati concorresse a svellerlo dall' acqua. Potrebbe in fatti a favore di questa congettura recarsi la spiegazione per cui i Neochimici all' azione del principio igneo associano l' affinità coll' ossigene de' metalli impiegati a decompor l' acqua ad un' alta temperatura. L' Ossido di Manganese, di cui si valse a guidare all' acqua la corrente elettrica, lo costrinse a cambiare opinione. Di esso non si dubita che non sia saturato di ossigene; e non pertanto molto gaz di questo nome sprigionossi senza che il manganese svestisse punto lo stato di ossido: vuol dire che il gaz senza il soccorso dell' affinità metallica si formò a spese dell' acqua.

Nel secondo articolo ei combatte l' opinione del sig. Pacchiani, il qual sostiene che qualunque metallo si adoperi, l' elettricità detta positiva della pila ha forza d' impregnar l' acqua di acido muriatico. Si mostra che ciò avverasi, valendosi dell' oro, del platino, del ferro, del manganese: ma con altri metalli, coll' argento per mo' d' esempio, col rame, collo stagno, collo zinco, coll' antimonio, l' acqua veste piuttosto il carattere di alcalina; quando in entrambi i lati della pila, quando più rapidamente e sensibilmente, ove massime s' impieghi stagno e zinco, nel lato negativo a preferenza dell' altro, ove gl' indizii ne furono e lenti e scarsi.

Nè solo con ogni metallo non si ottiene l' acido muriatico, ma in qualche incontro anche i più opportuni veggonsi venir meno. Ei nel terzo articolo lo mostra dell' oro, recando più sperienze, fra le quali gioverà sceglierne una sola. La corrente elettrica positiva

di una pila guidata da un filo d'oro ad agire sull'acido nitrico ne svolge per vero dire molto gaz ossigeno; ma punto non lo altera, nè lo mette in istato di morder l'oro, che rimansi intatto nè soffre soluzion niuna, qual non tarderebbe a manifestarsi, se l'acido nitrico per l'accoppiamento col muriatico vestisse i caratteri della così detta acqua regia. Benchè ad ammonirne de' pericoli a cui si espone chi si affretta di giugnere a conchiusioni generali, servir ponno certe anomalie offertesi al nostro collega nel corso de' suoi tentativi. Egli, a cagion d'esempio, ne assicura che avendo sottoposto all'azion della pila nel lato positivo, e valendosi pur sempre dell'oro, un ossido nero di mercurio formato di mercurio corrente e di ossido rosso di mercurio, nell'atto che questa preparazione contrasse qualche sensibile alterazione, e che l'acqua con essa nel tubo rinchiusa contrasse pure qualche acidità, nè anche un atomo non manifestossi di muriato mercuriale. A questo fatto un altro tien dietro subito nell'artic. 4°. da cui sappiamo che trovandosi posta in circostanze affatto simili una soluzione di nitrato di mercurio, il filo entro poche ore si coperse di minutissimi cristalli giallognoli, ne' quali l'autor ravvisò i caratteri essenziali di quel sale metallico che già tempo appellavasi mercurio dolce.

Si passa nel 5°. artic. a provare che a torto alcuni, e fra questi Kruiskank, si mostran persuasi che identico all'acido del nitro sia quello di cui l'acqua impregnasi per l'azion positiva del piliere. Le prove dirette che posseggonsi dell'identità di quest' acido col muriatico bastano a convincer d'errore quell'opinione; e l'autor nostro poteva esserne contento; se non che

ha voluto pur toglierle l'appoggio suo principale. Kruiskank afferma che dell' energia di quell'acido s' accorgon tutte le sostanze metalliche, l' argento fra le altre, che cedono all' azione dell' acido del nitro. E bene; il nostro collega trattando colla potassa pura quella materia bigia che i fili d' argento depositano al fondo de' recipienti, non ne ha mai ottenuto un atomo di nitro. Davvero che chi conosce la potassa, converrà che se quel bigio sedimento fosse un nitrato d' argento con eccesso, come suppone Kruiskank, o senza eccesso di ossigene, non avrebbe essa potuto non istaccarne l' acido e non riformarne il nitro.

Decisive pur sono le sperienze per le quali nel numero 6°. si mostra che un vero alcali minerale formasi nell' acqua sottoposta verso il polo negativo all' azion del piliere. Forsechè non è tale quella ch' ebbe a testimonio irrefragabile lo stesso Volta, nella quale avendo il nostro collega posto a distillare l' acqua raccolta in più sperienze istituite con forti pile fino alla quantità di due libbre e renduta alcalina coll' elettricità de' poli negativi guidatavi da un nastro d' orpello, e avendo, poichè l' ebbe concentrata assai, aggiunto al residuo tant' acido muriatico quanto bastava a saturarlo, ne ottenne molti piccioli cubi di puro sale comune?

Ricco quanto niun altro di nuovi fatti e di prove della perizia e sagacità del nostro Accademico è l' articolo che vien dopo, e a motivo della copia e varietà degli oggetti si suddivide in altri. E prima si fa menzione di volo di certe patine, cioè di certe alterazioni superficiali di cui per l' azione dell' elettricità positiva si copre l' oro ove sia purissimo, e il platino

anche. Degli altri metalli ci si dice che quali si ossidano; quali contraggono combinazione intima coll' idrogene, e quali anche coll' acqua non decomposta, cioè convertonsi in veri Idràti; combinazione che per vero dire sembra degna della maggiore attenzione. Passa indi egli a disaminare con particolar diligenza la patina, di cui si copre l' oro puro comunicante col polo negativo. Qui l' alterazion dell' oro è più pronta, nè superficiale soltanto, ma, ove il filo sia sottilissimo, penetra nel suo interno e lo trasforma in una cotal materia nera, spugnosa, disposta a prender varie forme e bizzarre, quando massime la pila essendosi indebolita, l' elettricità agisse lenemente. Di questa materia nera l' autor dice che in essa l' oro trovasi combinato coll' acqua e coll' idrogene da lui detto Flogogene. Ei però la denomina un idrato d' oro flogogenato, valendosi del diritto che a lui compete quanto a veruno, di operare sopra una lingua viva senza dubbio e anzi di origine sì recente, e suscettibile d' incrementi, e bisognosa probabilmente di modificazioni e riforme. Accosta egli molto ingegnosamente queste sue osservazioni a quelle che hanno di fresco levato di se molto grido, dell' acuto e infaticabile Ritter, a cui sembrò che l' elettricità della pila imprima e affigga ai metalli, alle monete d' oro a cagion d' esempio, una certa polarità. Il nostro Accademico reca ad interpretarle una sua congettura plausibile assai, che ne scemerebbe di molto la meraviglia. In fatti secondo altre sue sperienze non acquistano la supposta polarità e con essa la facoltà di scuotere una rana, che le monete comunicanti col polo negativo della pila, del quale ei si è

pure assicurato che presto assai fa sorgere in esse o ne' fili d' oro situati similmente il suo idrato flogogenato. Se questa congettura è, come sembra, fondata, per lieve che sia l' alterazione superficiale che la moneta ne soffre, essa basta a render ragione del fenomeno ritteriano. *(e)* Alterazioni quando simili, quando diverse da quelle dell'oro gli offerse l'argento. Fra queste merita d' esser distinta quella che nell' esperimentare con due grossi fili d' argento comunicanti quinci e quindi co' due poli della pila, e immersi cogli altri due estremi alla distanza l'un dall'altro di tre linee nell' acqua d' uno stesso recipiente, gli manifestò il filo negativo. Formossi attorno a questo e si depose pure nell' acqua una materia bigia di colore, in cui ei non esita a scorgere i caratteri di un vero idrato, vale a dire, di una combinazione d' argento coll' acqua in istato d' acqua; Composto di cui egli il primo arricchisce la Chimica; giacchè gl' idrati metallici di Proust a rigore non son tali, trovandosi in essi l' acqua combinata non mica a un metallo, ma sibbene a un ossido metallico. Tra gli effetti ottenuti impiegando fili di rame, gioverà far menzione di un solo accennato anche da principio; ed è che protraendo l'esperienza a ben dodici ore, e mettendo da parte le alterazioni sopravvenute al rame, l' acqua non solo trovossi in entrambi i lati alcalina;

(e) Di questo anzi potrebbe taluno avvertire, ch' esso in ultimo non è che un caso speciale compreso nella general legge stabilita e promulgata da Volta, per cui a conveller le rane basta l' acconcia applicazione di un arco di un solo metallo, purchè gli estremi ne sieno un tal poco diversi, per differenze che sebben reali, ponno sottrarsi al senso, che a meglio dir le ravvisa nella stessa convulsion della rana.

ma che a quest' indole partecipò pur quella del recipiente comune, nel quale secondo il solito, all' uopo di compiere e chiudere il circolo, i tubi rimanevano immersi.

Più fenomeni e svariati ebbersi dai fili di ferro impiegati similmente. Immergendoli in tubi separati attorno al filo positivo, e nell' acqua con esso rinchiusa, formossi un muriato di ferro con eccesso di ossido distinto però dall' autore coll' aggiunto di termossidulo. In questo prodotto e ne' cambiamenti che sofferse per l' azione del Prussiato di potassa, ei riconosce una prova che il primo a formarsi nell' acqua comunicante col polo positivo è l' acido muriatico semplice; poi l' ossigenato; scostandosi anche in ciò dall' opinione del sig. Pacchiani, cui i suoi principii guidano a immaginare che la corrente elettrica, spogliando gradatamente l' acqua del suo ossigene, debba prima trasformarla in acido muriatico ossigenato, indi in acido muriatico semplice. *(f)* Il filo posto al lato negativo non contrasse

---

(f) Per chiuder la bocca agl' increduli, e più agevolmente a quelli che ammettendo i principii della nuova Chimica, rifiutano di adottare le idee del ch. Professore di Pisa, nè si mostran disposti ad accordargli che l' acido muriatico sia un mero ossido d' Idrogene meno ossigenato di quello che ci si presenta nell' acqua, è desso invitato a por la sua ipotesi al crogiuolo della sintesi. Ch' ei si compiaccia d' imitare i Neochimici, i quali a dimostrare la composizione da essi ammessa dell' acqua, recano la produzione che se ne ottiene, accendendo un mescuglio de' due gaz ossigeno e idrogeno, dai quali, ove sieno in una certa proporzione, resulta una quantità d' acqua uguale, dicesi, precisamente in peso a quelle de' due gaz. Se non gli è noto in qual proporzione i due principii ossigeno e idrogeno concorrano a formare nella sua ipotesi gli acidi muriatico semplice e ossigenato, forse reiterando i tentativi con diversi miscuglj, ei sarà abbastanza felice onde abbattersi in quello, in cui alla combustione de' due

patina sensibile; appena un tal poco annerì; e l'acqua mostrossi fortemente alcalina. Effetti in parte analoghi, in parte diversi, in genere più complicati si ottennero dai fili immersi nell'acqua dello stesso vaso senza ostacoli che vietassero ai prodotti di mescolarsi, e a cadaun filo di agire su i prodotti dell'altro. Fra essi non vuolsi ommettere di notare e la formazione di un vero idrato di ferro, o più veramente di ossido di ferro, giacchè in esso l'acqua in istato di acqua accoppiasi a un ossido. Degno eziandio di speciale menzione è il giallo, di cui non tardò a colorarsi l'acqua del vaso. Il nostro Accademico crede dovuto questo colore all'azione principalmente del filo negativo, attorno a cui si raduna, e lo incrosta l'idrato o idrossido metallico pur or mentovato, che conseguentemente alla facoltà propria dell'elettricità negativa di produrre un alcali, rimane da questo decomposto e trasformato in un ossido marziale alcalino pronto a sciogliersi nell'acqua

---

gaz tenga dietro la comparsa non equivoca dell'acido muriatico. In simil caso a questo argomento, meglio forse che non a quelli ch'ei reca, competerebbe il titolo dato da Bacone agli esperimenti che tolgon di mezzo ogni dubbio. Per altro chi scrive si crede tenuto ad aggiungere che quand' anche l'esito mal corrispondesse all'intento, l'ipotesi del professor pisano non ne soffrirebbe discapito tale, che mancassero i mezzi onde puntellarla. Se nel miscuglio l'idrogene entra in una proporzione più forte di quel che richiedesi ad ottenerne acqua uguale in peso ai due gaz, potrebbe darsi che porzione del gaz idrogeno sfuggisse alla combustione, nè a questa partecipasse che quella che può ossidarsi in forma di acqua. Ma se l'esito del tentativo fosse conforme allo scopo, qual robusto appoggio non avrebbe in esso l'opinione del dotto professore? Essa non rimarrebbe più esposta che a quelle eccezioni qualunque, delle quali presso taluno non va immune la stessa composizione dell'acqua.

che se ne tinge e convertesi in una specie di tintura marziale alcalina.

Accette pure assai giugneranno ai Chimici e ai Fisici le osservazioni offerte dal carbone sostituito ai metalli, e le congeiture da esse suggerite al nostro collega. Ei tagliò e foggiò questa sostanza in forma di nastri bucati in un estremo, onde raccomandandoli a fili di ferro, porli in comunicazione co' poli del piliere, e coll' altro estremo immersi nell' acqua di due tubi separati ricevuti al solito entro quella di un comun recipiente, e chiusi al solito, com' è d' uopo, perchè l'acqua rinchiusa non ne esca, e rimanga non pertanto libero il tragitto della corrente elettrica. Copioso gaz si svolse nel lato e tubo positivo; poco e sol su le prime nel tubo negativo: in questo l' acqua si caricò di Soda carbonata, di cui qualche atomo solo presentò quella del positivo, nel quale il carbone ritenne la sua nerezza, il negativo all' opposto in gran parte se ne spogliò. L' esperienza allungossi a ben 24 ore. Ei crede pure d' essersi assicurato che al carbone posto nel lato negativo sopravviene un cambiamento nella facoltà sua elettromotrice, confrontandolo, s' intende, col carbon vergine. Esso, riguardo a quest' ultimo, divien positivo, cioè riguardo al passaggio del fluido elettrico dall' uno all' altro, esso diviene disposto a dare, e il carbon vergine a ricevere; dond' ei congettura che dopo quest' alterazione il carbone tagliato a foggia di dischi, e accoppiato ad altri dischi di carbon vergine, framezzando a ogni coppia i consueti cartoncini bagnati, servir potrebbe a formare una pila composta di sostanze vegetabili solide. Ad un cambiamento conforme

va soggetto l' ossido nero di manganese, del qual pur si avvera, che per la elettricità negativa della pila diviene elettromotor positivo rimpetto all' ossido vergine. *(g)* Ei chiude il ragguaglio delle sue sperienze, informandone di alcune altre istituite senza il soccorso dell' apparato elettromotore. Sono esse interessanti quanto le prime, e lo scopo loro è di manifestare gli effetti e i prodotti che derivano dall' azion reciproca di un solo metallo e dell' acqua. Dove, sebbene non ne sia mestieri, ci si conceda di avvertire che, per quanto si mettan da parte gli strumenti elettromotori, non è già forse possibile di escludere in tutto l' influsso della facoltà elettromotrice, la quale, niente è tanto probabile, quanto che, ove due sostanze diverse si trovino a contatto, intervenga sempre e spieghi fra esse la sua energia, e associandosi agli altri loro principii di azione, come a cagion d' esempio, della chimica affinità, concorra a rendere complicati assai e malagevoli ad interpretarsi i fenomeni che ne resultano. Nell' acqua tenuta lungamente a contatto de' metalli più noti ridotti in minuzzoli il più lieve indizio non si scopre della formazione di un acido. Non che niuna acidità, ma nè anche niun' altra sensibile alterazione da lui non si osserva nell' acqua posta a contatto in vasi diversi col ferro e collo zinco, sebbene ne rimanessero essi, come suol dirsi, sensibilmente ossidati, e ne schiudesse-

---

(g) Questi cambiamenti nella virtù elettromotrice delle sostanze assoggettate all' azion della pila, potrebbero forse muovere alcuno a sospettare, che non potendo essi non aver qualche influsso sul corso e la direzione dell' agente elettrico, possa il piliere in qualche incontro parere indebolito, senza esserlo realmente.

ro molto gaz idrogeno. Ben lo sorprese il vedere che lo zinco tenuto non solo a contatto, ma per ben cinque ore entro una caraffa di cristallo chiusa con turacciolo smerigliato sbattuto coll' acqua, le impresse un carattere manifestamente alcalino, per cui tinse di un bel verde la tintura spiritosa di Alcea porporina, e appannò un tal poco le soluzioni di argento e di mercurio; il qual effetto pur si ottenne, operando similmente su le limature di rame e di ferro, e anche sul mercurio. Congiuntamente formansi attorno ai metalli, e se ne staccano ossidi che intorbidan l' acqua, e col riposo depongonsi in forma di finissima polvere bigia nello zinco, nera nel ferro e nel mercurio, bruna nel rame.

Bramoso egli per ultimo di acquistar notizie su l' indole alcalina contratta dall' acqua agitata collo zinco e col mercurio, versò in essa un po' d' acido marino; e filtratala in seguito e svaporata, ne ottenne un sale in forma di brevi aghi scarsi al segno, che gli fu tolto di spingerne più oltre l' esame. Ei non pertanto si mostra disposto a crederlo un muriato di ammoniaca.

Contento il nostro collega di aver esposto i fatti, quali l' esperienza glieli ha offerti, si mostra parchissimo nell' interpretarli; nè non accenna che quelle spiegazioni che gli si fanno incontro spontaneamente, avventurando al più al più, come s' è veduto, qualche congettura. Ben ei si crede tenuto a porre sulla fine del ragguaglio alcuni suoi pensieri su le vedute e ricerche di cui ha divisato di proseguire ad occuparsi. Ei se ne schiera innanzi parecchie, e promette di render-

ne, alcune almeno, l' oggetto di nuovi lavori. Dovrebbesi a parer suo cercare qual sia l' indole del gaz che accompagna la formazione ottenuta con certi metalli e col carbone, di un alcali: se identico alla soda prodotta nell'acqua del lato negativo del piliere, sia l' alcali di cui certi metalli la impregnano nel lato positivo: se alla produzion della soda concorra l'acqua, e quali ne sieno i componenti: se la soda carbonata che formasi, quando in vece de' metalli s' impiega carbone, debba a questo tutto il suo acido carbonico: se la sostanza elettrica non somministri per avventura qualche componente ai prodotti nati per l' azion sua; e se questi otterrebbersi similmente, operando o nel vòto o in arie fattizie: se impiegando i metalli, il carbone, l' ossido di manganese, l' acqua soffra vera decomposizione, e conseguentemente se i gaz che svolgonsi, derivino unicamente da essa: se il principio a cui debbono i gaz la loro elasticità, esca dall' acqua, o non piuttosto dall' agente elettrico; se gli effetti chimici dovuti al piliere, possano ottenersi colle macchine ordinarie: perchè, se coll' azion del piliere consente quella per cui nell' acqua tenuta a contatto di un metallo si genera un alcali, sia questo diverso dalla soda: e se, come sembra, è desso volatile, in qual guisa possa concepirsi ch' esso sorga in mezzo alla tanta agitazione *(h)* impiegata in quell' in-

---

(h) Qui alcuno fra i neochimici trarrà forse innanzi, e osserverà che probabilmente l' agitazion violenta è una condizion necessaria all' uopo, perchè per essa l' aria rinchiusa nella caraffa, rimane sbattuta e intrisa per così dire coll' acqua, com' è mestieri, affinchè le molecole del suo gaz azotico giungano divise e suddivise a contatto di quelle divise anch' esse e

contro e in seno all' acqua stillata che non rinchiude quantità sensibile di azoto: perchè l'acido muriatico sorga, operando con certi metalli, non con altri: perchè congiuntamente l'ossigeno, quando svolgasi nell'aspetto di gaz, quando si affigga ai metalli: e parimente perchè, mentre altri metalli posti in simili circostanze comportansi come il ferro, l'ossidazion loro vada disgiunta dalla comparsa di quell'acido: perchè per ultimo nel caso, in cui, operando senza il soccorso degli strumenti elettromotori, il ferro e lo zinco soffrono cambiamenti conformi, non si generi acido, ma sibbene un alcali.

Certo che nobilissimi sono questi quesiti e degni che chi li ha proposti cerchi di scioglierli e dia anzi alle sue fatiche un giro più ampio. A cagion d'esempio, giacchè la sua industria è stata di fresco premiata colla scoperta di alcuni veri idrati, e fra gli altri di quello di argento che per l'azion del piliere veste questo carattere, tutto sembra invitarlo ad entrare in un campo vergine e intatto e posto sul confine di quello, in cui Proust incontrò i suoi Idrati o Idrossidi che debban dirsi, da lui esaminati con tanta sagacità. Collocando egli le sue cure su quest'ordin d'oggetti, chi sa che non gli venga fatto di rinvenir prodotti, ne'quali l'acqua annidi in forma di acqua fra quelli anche, de'quali ci s'insegna ch'essa concorre a produrli decomponendosi, e consegnando loro il suo ossigene? Pare che non possa non pungerlo qualche brama di scoprir la cagione, per

suddivise dell' idrogene nascente. Senza ciò non potrebbero elle esercitare le une su le altre la reciproca loro affinità, e sorgerne l'ammoniaca composta, dicesi, di azoto e d' idrogene.

cui, mentre nell'acqua rinchiusa in tubi separati sorge quinci acido muriatico, quindi soda, cosicchè mescendo le acque, ne resulta un muriato di soda, inetti all'uopo sieno gli stessi fili metallici immersi immediatamente nell' acqua di uno stesso recipiente. Soprattutto poi degna della sua perizia e del suo acume sarebbe la determinazione dei criterii, onde, giacchè i principii più fini de' corpi, ove giungano a svincolarsi, sono pronti ad entrare in nuove combinazioni; e della stessa sostanza elettrica si sospetta con fondamento, che anch'essa sia un essere composto assai e opportuno a decomporsi, onde, dico, in ogni speciale incontro giugnere a distinguere gli *edótti* dai prodotti. Sembra che meriti pure d' essere con nuove sperienze confermata l' osservazione del nostro collega il qual vide sorgere più presto e in maggior copia l' alcali verso l' estremo negativo della pila, che non l' acido verso il positivo. Può essa acconciamente applicarsi ad interpretare un fatto narratoci dall' illustre Volta, il quale in una Nota aggiunta a quella famosa memoria, in cui espose all' Istituto Nazionale di Francia la teoria del nuovo strumento elettromotore, ne informa che riesce più molesto il senso di bruciore desto su la lingua dal polo negativo del piliere che non quello di sapor acido, che provasi tenendola a contatto del polo positivo. Quest' ultimo fatto consente con un altro, di cui fa menzione il ch. sig. de Luc. Nelle ordinarie macchine elettriche le scintille estratte da un conduttore contiguo al cuscino, e isolato, onde trovisi in istato di elettricità negativa, risvegliano nel dito e nella nocca un senso di puntura più molesta di quella delle scintille, che balzano da

un conduttore similmente isolato, e comunicante col disco. L'acutissimo Fisico di Ginevra di quella maggiore molestia accagiona lo sforzo, con cui la corrente elettrica nell' uscir dal dito tende a sollevar l' epidermide, d' indole, com' è noto, coercente, dalle sottoposte papille cutanee. La spiegazione è plausibile; ma poichè nel caso de' sapori le differenze sono non d' intensione soltanto ma di qualità, sembra che convenga attenersi al nuovo dato offertoci dal collega Brugnatelli. Per altro mettendo omai da parte le riflessioni speciali che ci si presenterebbero in folla, è meglio raccoglierle in una sola, e avvertire che per l' introduzione degli apparecchj elettromotori nelle officine de' Chimici, sembra che la suppellettile loro siasi arricchita di un mezzo, onde associandolo agli altri dianzi da essi posseduti, intraprendere con auspicii più lieti forse che non inaddietro, l' analisi delle naturali sostanze. Tutto ne annunzia che questo strumento non rimarrassi fra le lor mani inoperoso. Potrebbe anzi darsi che alcuno fra essi, nella persuasione che le cose sieno omai giunte a tale che convenga farsi in tutto da capo, e ripigliar quest' analisi da' suoi primi principii, si accingesse animosamente all' impresa, e nel farlo non temesse di affrontar l' esame di opinioni pressochè comunemente adottate, sebbene a proteggerle, coll' autorità degli uomini grandi a cui sono esse dovute, concorra l' usbergo e l' egida della nuova nomenclatura.

MEMORIE
DELLA CLASSE
DI FISICA E MATEMATICA

SAGGIO
Sui movimenti proprii delle Fisse

Del P. Giuseppe Piazzi

Ricevuto ai 20. Giugno 1804.

Halleio verso il principio del passato secolo comparate avendo le longitudini delle stelle riportate nell' Almagesto colle osservate ai suoi giorni, riconobbe il primo in alcune di esse dei movimenti che dall'annua precessione pienamente si distinguevano.

Louville e Cassini confermarono sì interessante scoperta, e Mayer l' estese e rassicurò maggiormente, confrontando le sue osservazioni con quelle di Roemero. Questi primi passi però non si avanzarono al di là di pochissime stelle, delle quali neppure furono in grado di parlare con precisione. Mancavano osservazioni abbastanza esatte e remote, onde potere alcuna cosa affermare con sicurezza. Ebbe sorte alquanto meno difficile

l'età nostra; e mercè i cataloghi di Flamstedio, e principalmente di la-Caille e Mayer, venne a capo di assegnare a parecchie stelle i loro particolari movimenti. Dobbiamo ciò alle fatiche di Maskelyne, la-Lande, e di altri; ma sopratutti dell' Astronomo di Vienna Francesco Triesneker. Ben poco nulladimeno si è fatto sinora, ed assaissimo a far ci rimane. Sifatti movimenti, comunque bene stabiliti, voglionsi verificare e confermare; e voglionsi esaminare non meno le altre moltissime stelle registrate nei cataloghi, e non ancora sottoposte alla discussione. Per la qual cosa dopo la pubblicazione del mio catalogo, avendo io nel corso del 1803. riosservate molte stelle nel medesimo contenute, sono entrato in speranza di potere alquanto promuovere questa ancor nascente importantissima parte dell' Astronomia. Per ora ho scelte trecento stelle circa tra quelle nuovamente osservate nel 1803; e mi sono studiato indagare le variazioni alle quali sembrano soggette. Se questo primo saggio sarà tanto avventuroso di ottenere l' approvazione dell' Istituto Nazionale, al quale io lo consacro, spero di poter darne successivamente la continuazione riguardo a tutte le stelle di Flamstedio, la-Caille, e Mayer.

Prima di esporre i miei risultati, siami permesso accennare brevemente da quali fonti gli abbia attinti, con quali cautele, e con quale ordine siano disposti.

I Cataloghi di Mayer e la-Caille, sebbene non più di mezzo secolo da noi lontani, sono niente di meno i migliori dei quali in questo lavoro potessi giovarmi. Questi pertanto ho principalmente presi in considerazione per tutte le stelle che con essi mi sono comuni.

Nel che però, altrimenti praticando che fatto non aveva nel mio catalogo, impiegate non ho le riduzioni del Wollaston al 1790; come quelle che non sono sempre sicure, e le quali dipendono da una precessione dalla mia un poco diversa. Ho quindi riscontrati i cataloghi stessi di questi Astronomi; il primo nel volume primo (*Tobiæ Mayeri ec. opera inedita*) ed il secondo nella terza edizione dell' Astronomia di la-Lande; non avendo potuto rinvenire l'opera stessa di la-Caille (*Astronomiæ fundamenta*); e ridotte le posizioni delle quali mi era duopo al 1803, ne ho divisa la differenza colle mie, rispetto a la-Caille per 53., e riguardo a Mayer per 47. La nuova determinazione della latitudine di Gottinga inserita negli ultimi volumi (*della conoscenza dei tempi*), maggiore di 11″ di quella impiegata dal Mayer, mi fece dapprincipio correggere le declinazioni di questo Astronomo: ma conobbi in seguito che non si dovevano in alcun modo alterare.

Prezioso sommamente sarebbe il Catalogo di Flamstedio, se non sentisse un poco troppo della sua vicinanza al nascere (quasi direi) della moderna Astronomia. Con poca esattezza in quel tempo fabbricavansi gli stromenti; nè con maggiore attenzione venivano rettificati e verificati. Le verificazioni del piano delle divisioni, delle divisioni medesime, e dell' asse del Canocchiale da Flamstedio usate, non possono certamente conciliar loro la maggiore fiducia. Non erano conosciute nè l'aberrazione, nè la nutazione; l'altezza del Polo di Greenwich imperfettamente stabilita; incerte le rifrazioni, ed intieramente trascurata la temperatura dell' Atmosfera. Nientedimeno mi lusingai da principio, che cal-

colando le osservazioni medesime, un secolo d' intervallo potesse rendere insensibili gli errori dipendenti dal quadrante e dall' oriuolo. Ma vidi ben presto, che se ciò poteva riuscire di qualche vantaggio rispetto alle declinazioni, era inutile anzi pericoloso riguardo alle Ascensioni rette. Poichè avendone calcolate diverse, le trovai assai meno d' accordo colle determinazioni degli altri Astronomi, che non si fossero quelle date da Flamstedio medesimo. Forse particolari circostanze, delle quali egli non parla, gli avranno suggeriti dei compensi e correzioni, presentemente impraticabili. Per le quali cose non giudicai bene d' impiegare le osservazioni di questo Astronomo che, o quando le stelle mancavano in Mayer e la-Caille; onde avere in questi casi, se non altro, un' indicazione almeno; o quando questi due Astronomi erano troppo tra loro discordi; o finalmente quando le osservazioni di Flamstedio erano più volte replicate. In tutti questi casi le differenze in Ascensione retta sono state prese colle Ascensioni rette medesime date da Flamstedio; e le differenze in declinazione colle declinazioni calcolate introducendovi l'abberrazione, la nutazione, l' altezza del Polo data dal Maskelyne, le rifrazioni dello stesso colla correzione corrispondente alla temperatura media di Greenwich per ciascun mese dell' anno. Malgrado però tutte queste diligenze, le declinazioni di una medesima stella, che si hanno da osservazioni diverse, particolarmente se siano un poco lontane; tra di esse differiscono talora di 30″ di 40″ e sino di 60″ Per ι. 1 della Libra, a cagion di esempio, osservata dieci volte da Flamstedio, riducendo le osservazioni tutte al 1690., si hanno i seguenti risultati

18. 34. 55, 8.	ai 20. Maggio	1690.
35. 18, 1.	5. Maggio	1691.
35. 10, 4.	10-12. Aprile	1692.
35. 25, 4.	25. Aprile	1693.
35. 42, 8.	30. Aprile	1694.
35. 10, 7.	18. Marzo	1700.
34. 46, 9.	29. Ap. e 4. Mag.	1700.
35. 40, 6.	17. Aprile	1706. (*)

Mosso probabilmente da ciò non fece il Mayer alcun caso del catalogo di Flamstedio, nè delle sue osservazioni: Noi però godiamo di un beneficio grandissimo di cui egli fu privo, quello del tempo.

Non si è da me trascurato il famoso Triduo di Roemero, di cui sì gran caso fece il Mayer. Disperava pe-

(*) Nei miei calcoli mi sono servito dell' edizione del 1725; ma non ho considerato che le osservazioni dal 1689. in poi. Alle medesime applica il Flamstedio due correzioni; la prima ch' egli chiama = errore dello stromento =, ritrovasi in testa di ciascuna pagina della sua storia; la seconda è semplicemente indicata nei prolegomeni col titolo di = errore delle divisioni =. Su quest' ultima si possono promovere molti dubbii: e veramente le declinazioni delle stelle osservate più volte da Flamstedio sono più d' accordo con Roemero a lui contemporaneo senza tale correzione, che con essa. Nientedimeno siccome si è costantemente impiegata da Flamstedio in tutte le sue riduzioni; così ho io giudicato dovere similmente valermi e della prima e della seconda. Se taluno opinerà che l'errore delle divisioni, ossia la seconda correzione la quale si stabilisce di 15″, debba ommettersi, basterà che aggiunga 0″, 133 ai movimenti al Sud, e sottragga la medesima quantità dagli altri al Nord. Si noti ancora, che di alcune stelle non avendo ritrovato osservazioni agli anni da me consultati, ho comparato le declinazioni medesime di Flamstedio: e ne ho segnati i risultati, i quali non sono più di dieci, con un asterisco. Se in questi vogliasi tener conto dell' errore di 10″ sull' altezza del Polo di Greenwich, e dell'altro di 15″ sulle divisioni, communi a tutte le declinazioni di Flamstedio; la correzione totale sarebbe 0″, 221. da applicarsi nel modo testè spiegato: ma vi rimane l' aberrazione e la nutazione; le quali possono in qualche caso compensare i due primi errori.

rò di rinvenirlo, quando dal Dottor Seyffer, per atto di sua particolare gentilezza, ne ebbi una copia da Gottinga. Confesso il vero che nell'esaminarlo scemò in me alquanto la vantaggiosa opinione ch' io me n'era formato. Le stelle osservate da Roemero non sono più di 82: l' errore della linea di collimazione che danno le diverse stelle circumpolari, è diverso; e la differenza non è picciola: le osservazioni del Sole onde stabilire le AR.te non sono nel tempo più opportuno dell' anno: Non si è finalmente tenuto conto nè del Barometro nè del Termometro. Sono tuttavia queste osservazioni di lunga mano migliori di quelle di Flamstedio. Ne ho per tanto conchiuse le AR.te, e le declinazioni; le quali per maggior sicurezza ho voluto paragonare colle altre che già ne aveva ricavate il Mayer. La maggiore differenza si è presentata nelle declinazioni: del che per altro mi è stato facile vederne la ragione. Mayer ha impiegato generalmente 1.′ 39″ per correzione della linea di collimazione, ed io 1.′ 49″; quanto appunto si ha, prendendo il medio di tutti i diversi risultati; la qual cosa è stata similmente osservata dal ch. Ab. Triesneker.

Considerando però che ebbe forse il Mayer dei lumi e rischiaramenti che a noi pervenuti non sono, e la sua autorità essendo del massimo peso; tolta qualche stella in cui il suo calcolo è erroneo, ed altre due o tre dal medesimo non calcolate; per le altre mi è paruta cosa più sicura preferire le sue determinazioni alle mie. Dalle medesime pertanto ridotte al tempo di Roemero, e paragonate colle mie, ho dedotto l'intero movimento: a cui applicata la precessione, e divisa la differenza per anni 97. ne ho conchiuso il movimento particolare.

Il catalogo di Maskelyne conta certamente un' epoca assai recente, non rimontando al di là del 1770. Ha egli però nella bontà e numero delle osservazioni, sulle quali è stabilito, un pregio eguale, se non maggiore, a quello che gli altri solo dal tempo in parte riconoscono. Vero si è che non contiene se non 36. stelle: Ma fossero pure minori in numero, qualunque più piccola cosa è sempre un acquisto. Rispetto alle declinazioni ho quindi similmente cercate le variazioni: le AR.te non si sono comparate, per essere le stesse del Maskelyne, le quali ho preso per base di tutte le mie determinazioni.

Avrei potuto valermi ancora delle poche stelle, le quali sulle osservazioni di la-Hire furono determinate da le-Monnier pel 1687. (*Histoire céleste ec. à Paris 1741.*) Ma le supposizioni e i compensi dei quali conviene usare per correggere l' oriuolo ed il quadrante di quell' Astronomo, non sembrano permettere che si abbia in esse, comunque sì remote, la maggiore fiducia: E per altra parte le posizioni delle medesime stelle sono state da più Astronomi posteriormente stabilite con tanta diligenza, che la bontà di queste supera di lunga mano l' intervallo di quelle.

Flamstedio pertanto, Roemero, la-Caille, Mayer e Maskelyne, i soli sembrati mi sono, le osservazioni o cataloghi dei quali si potessero prendere in considerazione. Se non che avvenuto essendomi in alcune stelle, le quali offrivano movimenti assai forti, e sino ad ora nè conosciuti nè congetturati; ho voluto a maggiore sicurezza tentarne il confronto con Evelio ancora; non essendo certamente le posizioni di quest'Astronomo così dubbie, che la differenza di 4. in 5. minuti non debba ren-

dersi sensibile, quando provenga da un movimento particolare della stella. Così di D. dell'Eridano, o della 40ª. di questa costellazione secondo Flamstedio, nella quale ho riconosciuto un movimento maggiore assai di quanti in niun'altra stella ne siano stati osservati, ne ho cercata la variazione pur anche con Evelio; la quale ho ritrovato poco diversa da quella che danno le osservazioni di Flamstedio, quelle di la-Lande, e le mie. Questo istancabile Astronomo, che sì grandemente ha promosso, e con zelo senza pari siegue a promuovere l'Astronomia, era nientedimeno sì lontano dal sospettare un simile movimento in questa stella, che non dubitò di supporre un errore di 5.′ 35.″ sulla declinazione che ne dà Flamstedio; la quale per altro è appoggiata sopra due osservazioni (*vedi conoscenza dei Tempi An. VII. pag. 362.*)

Stabilite le variazioni che si hanno dai sopramentovati Astronomi, mi sono fatto ad esaminare e tra di esse comparare le mie osservazioni medesime, così in Ascensione Retta, come in Declinazione. Le Ascensioni Rette le quali, oltre all' incertezza dell' osservazione sempre maggiore che non sia nelle declinazioni possono variare, e per le stelle di confronto, che non sempre si possono impiegare le stesse, e pei movimenti proprii non ancora ben sicuri, esigono maggiori cautele e riguardi. Non ho quindi considerati i movimenti proprii, che quando i medesimi ed erano indicati da qualche altro Astronomo, e le osservazioni tutte assai buone, e le differenze finalmente dedotte erano dalle medesime stelle nelle due epoche diverse. Nelle declinazioni, meritando esse, così per l' indole loro medesima,

come per la natura dello strumento, con cui sono state determinate, maggiore confidenza; non ho tenuto conto che della bontà delle osservazioni, e del loro intervallo: quante volte le osservazioni mi sono sembrate buone, e alla distanza le une dalle altre non meno di sette in otto anni, ne ho generalmente presa la differenza, e divisa per l' intervallo, che le separa.

Siccome i movimenti, che si hanno dai diversi Astronomi, nè sono nè possono essere tutti di eguale peso e misura, così credo conveniente accennare entro quai limiti a un di presso si possa restringere l' incertezza di ciascuno. Per un esame delle stelle in tempi diversi replicatamente osservate da Flamstedio, l' errore probabile delle sue osservazioni può benissimo giungere a 40″ in declinazione, cioè 20″ in più e 20″ in meno, e sino a 50″ in Æ.ta; e potrà essere anche di 60″ e più, quando non si tratti che di una sola osservazione. Se a Roemero si dia un errore di 15″, non si anderà molto lungi dal vero. Mayer ha egli stesso dato giudizio delle sue determinazioni. Una sola osservazione può avere l'incertezza di dieci secondi, e dieci osservazioni di due secondi. Lo stesso parmi si possa dire per la-Caille. Le mie osservazioni mi lusingo che non siano soggette ad errore maggiore di 3″. Lo stesso parrebbe doversi stabilire per quelle di Greenwich: se non che il Signor De-la-Lande, avendone calcolate più di 200. del Sole, ha riconosciuti degli errori di 5″ sulle divisioni del Murale di quell' osservatorio, la qual cosa a un di presso si è similmente ritrovata da me; e dopo varj esami e confronti, mi è paruto che non si anderà molto lontano dal vero, supponendo un errore

di + 3″ sul maggior numero delle distanze dal Zenit osservate dal Maskelyne. Se opportuna si giudichi siffatta correzione, si dovranno diminuire di 3″ le declinazioni australi, e di 3″ aumentare le boreali. I movimenti nientedimeno si sono dedotti dalle declinazioni, siccome si danno dal Maskelyne pel 1770; i quali si ridurranno a ciò che ne verrebbe coll'indicata correzione, aumentando quelli verso mezzogiorno di 0″, 091, e diminuendo della stessa quantità gli altri verso il Settentrione. Saranno quindi i limiti dell' error probabile per

	in Æ.R.ta	in Decl.
Flamstedio	± 0″, 35.	± 0″, 20.
Roemero	0, 07.	0, 10.
Mayer La-Caille.	0, 10.	0, 15.
Maskelyne	0, 10.	0, 10.
Piazzi	0, 15.	0, 20.

Il numero delle osservazioni così nell'una come nell' altra delle due posizioni insieme comparate, e l' accordo maggiore o minore nei diversi risultati, faranno conoscere con più precisione l' uso di questi limiti. Esaminato con essi il movimento di ciascuna stella, o il medio, quando sono più, molti pajono assai incerti, nè si possono impiegare, se prima non siano confermati: altri però si possono risguardare come sicuri, se non nelle centesime, almeno nelle decime.

Rimane brevemente a dirsi della disposizione, che ho dato al mio lavoro. I movimenti proprj, che si hanno da ciascuno Astronomo, sono indicati con lettera iniziale dello stesso; il numero, che siegue Flamstedio, Mayer, Roemero, e Maskelyne si riferisce a quello delle lo-

ro osservazioni; per la-Caille manca in la-Lande; ed il nome di Maskelyne si distingue da quello di Mayer per la lettera K che siegue la lettera iniziale del primo. I segni +, — che precedono i movimenti, ne mostrano la direzione, + verso settentrione in declinazione, e verso oriente in Æ.ta, — verso mezzodì in declinazione, e verso ponente in Æ.ta. I movimenti poi in Æ.ta sono preceduti dalle Ascensioni rette, e similmente dalle declinazioni quelli in declinazione. Le ascensioni rette, delle quali do il movimento, che risulta dalle mie osservazioni, sono le stesse osservate nel 1803, e ridotte al 1800: delle altre il medio delle più sicure così del 1803; come degli anni precedenti. Di alcune però, che nel Catalogo, che ho pubblicato, non mi parvero bene stabilite, ne do la sola determinazione del 1803; ed ho posto un asterisco all'anno delle osservazioni, che non si sono considerate. Lo stesso metodo si è tenuto nelle declinazioni. Le ascensioni rette sono fondate sul primo Catalogo di Maskelyne. Le medesime esigono qualche correzione; ultimamente Maskelyne ha dato la sua. Io non aspetto che il prossimo equinozio di Autunno per assicurarmi della mia. Se la medesima potrà cagionare una variazione sensibile sulle ascensioni rette quì riportate, ed alterare i risultati stabiliti, ne darò le correzioni.

Le precessioni impiegate per la riduzione delle osservazioni di Flamstedio e Roemero, sono
Prec. Decl. $= 20'', 017$. Cos. Æ.ta intermedia.
Prec. Æ.ta $= + 45'', 926 \pm 20'', 017$. Sen. Æ.ta tan. Decl. intermedia.

Per Mayer e la-Caille
Prec. Decl. = 20″, 013. Cos. Æ.ta intermedia.
Prec. Æ.ta = + 45″, 927 ± 20″, 013. Sen. Æ.ta tang. Decl. intermedia.

Con questi dati sarà facile risalire alle posizioni, dalle quali sono partito.

Amerei chiudere il sin qui detto alcuna cosa accennando sulla cagione di siffatti movimenti. Ma niente ancora stabilire possiamo, che sia probabile e fondato, e insieme rischiari l' argomento. Corpi situati ad un' immensa distanza tra di essi e da noi, mossi secondo tutte le direzioni, con velocità diverse e niente proporzionali alle loro apparenti grandezze, e senza alcuna legge che da noi si conosca; egli si è il fenomeno, che a noi presentano i movimenti proprj delle Fisse. Se realmente sono esse le stelle, che si muovono, quali prodigiose grandissime orbite non descriveranno mai, e con quali sorprendenti velocità! Se è il Sole, che mutando di luogo coll' intiero suo sistema, cagiona queste apparenze diverse, qual cammino tiene egli mai! Si volgerà a un tempo medesimo verso diversi punti dello spazio? Si dirà forse che è un risultato e del movimento del Sole e di quello di ciascuna stella in particolare? Quale complicazione e caos di movimenti, che niuno mai potrà separare e distinguere! Non sembra che il tempo abbia abbastanza maturato sì intralciata difficile indagine. Forse tutto dipende da qualche particolare semplicissima circostanza, che tuttora si sottrae all' attenzione nostra; e forse ci sono ancora nascosti più anelli della gran catena dell' attrazione. Contentiamoci dunque, sino a che il cielo stesso non parli, di

raccoglier dei fatti; e guardiamoci dall' azzardare congetture e formare sistemi, i quali generalmente non servono che a ritardare i progressi delle cognizioni, che voglionsi promuovere. (**)

(**) La sola circostanza che si può rilevare intorno a questi movimenti si è, che la maggior parte si fa verso il mezzodì; e che alcuni di essi sembrano crescere; la qual cosa si scorge principalmente in β vergine, β dell' Aquila, e η serpente. Egli è vero che questa congettura non è fondata che sulle sole mie osservazioni, ma esse sono in sì gran numero da meritare qualche confidenza.

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
f. Balena	0°. 15'. 57", 9	– 0", 273. F. – 0', 315. P.	1792. 1802.	8
Algeni 6	0. 44	. . . .	. . . .	. . .
5ª. Mayer	1. 52. 48, 5	– 0, 183. M. 3	1797. 1803.	10
ι Balena	2. 18. 25, 3	+ 0, 220. F. + 0, 200. R. 2 + 0, 264. P.	1796. 1801. 803.	20
9. Balena	3. 9. 3, 0	+ 0, 310. F.	1802. 1803.	8
7. Mayer	3. 34. 3, 1	– 0, 240. M. 2	1797. 1803.	8
α Fenice	4. 5. 16, 0	+ 0, 008. C.	1795. 1802. 1803.	16
η App. Sculr. . . .	4. 29. 41, 5	– 0, 200. C.	1795. 1803.	6
22. C. A.	5. 5. 20, 0	– 0, 160. C.	1795. 98. 1803.	10
52. Pesci	5. 31. 48, 7	+ 0, 300. F.	1795. 1800. 1801. 1803.	20
14. Mayer	6. 19. 12, 3	– 0, 040. M. 2	1797. 1803.	8
ε Andromeda . . .	7. 0. 8, 0	– 0, 2:::: H. + 0, 628. F.	1795. 1803.	10
β Balena	8. 23. 2, 6	+ 0, 409. F. + 0, 457. R. 2 + 0, 079. C.	1795. 1796. 97. 1801. 1803.	18

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
16°. 33'. 59", 9 A.	− 0, 174. F. 2. − 0, 382. P.	1792. 1803.	7
14. 4. 17, 78 B.	+ 0, 276. F. 15. − 0, 060. R. 3. − 0, 026. C. − 0, 019. M. 3. + 0, 088. MK. 4. − 0, 099. P.	1794. 97. 99. 1801. 1803.	25
0. 34. 36, 0 B.	+ 0, 036. M. 3. − 0, 267. P.	1797. 1803.	10
9. 55. 57, 0 A.	− 0, 127. F. 2. 0, 000. R. 2. + 0, 055. P.	1792. 1797. 1798. 1803.	18
13. 19. 23, 6 A.	+ 0, 049. F. 3. − 0, 009. P.	1792. 1803.	10
3. 19. 34, 0 A.	− 0, 151. M. 2. − 0, 500. P.	1797. 1803.	11
43. 23. 32, 8 A.	− 0, 342. C. − 0, 602. P.	1795. 1803.	6
34. 6. 43, 0 A.	+ 0, 120. C.	1795. 1803.	8
24. 53. 42, 5 A.	+ 0, 420. C.	1795. 98. 1803.	12
19. 11. 30, 8 B.	− 0, 025. F. 3.	1795. 1801. 803.	12
1. 36. 18, 8 A.	− 0, 121. M. 2. − 0, 200. P.	1797. 1803.	10
28. 13. 27, 0 B.	− 0, 200. F. 1. − 0, 251. P.	1795. 1803.	8
19. 5. 9, 1 A.	+ 0, 131. F. 1. + 0, 149. R. 2. + 0, 126. C. − 0, 150. P.	1795. 97. 1803.	18

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
18. Balena	8°. 51′. 19″, 6	− 0″,250. F.	1795. 1803.	7
ζ Andromeda . . .	9. 11. 25, 3	− 0, 033. F.	1798. 1803.	7
23. Mayer	10. 15. 7, 0	− 0, 283. M. 3 − 0, 02:: P.	1797. 1803.	10
20. Balena	10. 41. 47, 5	− 0, 249. F. − 0, 253. M. 1	1794. 1803.	10
26. Mayer	11. 14. 28, 0	− 0, 121. M. 1	1798. 1803.	7
29. Mayer	11. 59. 49, 4	− 0, 117. M. 2	1797. 1803.	10
σ. 1. Pesci	12. 58. 27, 0	+ 0, 328. F. + 0, 250. P.	1797. 1803.	19
72. Pesci	13. 38. 9, 0	+ 0, 432. F.	1798. 1803.	7
77. Pesci	13. 52. 9, 3	+ 0, 913. F. − 0, 493. M. 2	1797. 1803.	6
30. Balena	14. 25. 35, 2	+ 0, 041. F.	1795. 1803.	10
32. Balena	15. 2. 25, 5	− 0, 045. F.	1795. 1803.	7
ζ Pesci	15. 49. 20, 2	− 0, 096. M. 2	1798. 1803.	8
υ Pesci	17. 7. 27, 0	− 0, 650. H. + 0, 764. F.	1795. 1803.	7
ϑ Balena	18. 30. 19, 5	+ 0, 114. F.	1794. 1803.	6
94. Pesci	18. 58. 38, 8	+ 0, 191. M. 3	1797. 1800. 1803.	7

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
13°. 57′. 57″, 2 A.	− 0″, 087. F. 2.	1795.* 1803.	8
23. 10. 38, 3 B.	+ 0, 086. F. 3	1798. 1803.	10
2. 17. 54, 0 B.	− 0, 160. M. 4.	1797. 1803.	10
2. 13. 56, 3 A.	+ 0, 370. F. 8. − 0, 049. M. 2.	1794.* 1803.	8
5. 46. 3, 4 B.	− 0, 057. M. 1.	1798. 1803.	8
5. 45. 42, 2 B.	− 0, 106. M. 2. − 0, 133. P.	1797. 1803.	10
30. 43. 39, 8 B.	+ 0, 192. F. 2.	1797. 1803.	19
13. 52. 5, 0 B.	+ 0, 315. F. 2. − 0, 009. R.	1792. 98. 1803.	11
3. 50. 28, 5 B.	− 0, 091. F. 1. − 0, 091. M. 2. + 0, 058. P.	1791. 97. 1803.	10
10. 51. 29, 5 A.	+ 0, 130. F. 2.	1795.* 1803.	7
9. 58. 17, 4 A.	+ 0, 155. F. 2.	1795.* 1803.	7
6. 30. 54, 4 B.	− 0, 521. M. 2.	1798. 1803.	8
26. 12. 33, 6 B.	+ 0, 012. F. 2.	1795.* 1803.	7
9. 13. 9, 5 A.	+ 0, 040. F. 1.	1794.* 1803.	8
18. 12. 1, 0 B.	− 0, 077. M. 3.	1797. 1803.	6

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
96. Pesci.	19°. 39′. 16″, 5	+ 0″,191. F.	1797. 1803.	9
n Pesci	20. 12. 0, 0	+ 0, 136. F. + 0, 089 M. 3	1797. 1803.	5
54. Mayer	20. 42. 22, 5	− 0, 179. M. 2	1798. 1803.	9
49. Balena.	21. 12. 45, 0	− 0, 073. F.	1792. 1803.	8
π Pesci	21. 37. 36, 0	+ 0, 129. F. − 0, 133. M. 4	1794. 98. 1803.	11
105. Pesci	22. 13. 36, 0	+ 0, 400. F.	1798. 1803.	7
ν Pesci	22. 45. 26, 2	+ 0, 034. F. − 0, 200. M. 4 − 0, 490. P.	1794. 1796. 97. 1798. 1803.	20
109. Pesci	23. 30. 22, 5	+ 0, 276. F.	1795. 1803.	7
τ Balena	23. 41. 20, 0	− 2, 028 H. − 2, 073. F. − 1, 862. R. 3 − 2, 0::::. P.	1794. 1800. 1803.	9
4. Ariete	24. 20. 15, 4	+ 0, 382. F.	1792. 1798. 1800. 1803.	15
χ Balena	24. 56. 21, 0	+ 0, 189. F. + 0, 400. P.	1792. 1803.	10
54. Balena.	25. 3. 54, 9	− 0, 225. M. 3	1798. 1803.	7
ζ Balena	25. 23. 44, 7	− 0, 162. F.	1795. 1803.	7
β Ariete	25. 54. 10, 5	+ 0, 513. F. + 0, 160. R. 1 + 0, 304. C. + 0, 169 M 2	1795. 99. 1803.	10

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
6°. 15'. 29", 8 B.	− 0", 109. F. 1.	1797. 1803.	8
14. 18. 38, 7 B.	+ 0, 225. F. 1. − 0, 021. M. 3.	1797. 1803.	6
7. 10. 43, 9 B.	− 0, 013. M. 2.	1798. 1803.	10
16. 42. 19, 1 A.	+ 0, 166. F. 2. − 0, 100. P.	1792. 1803.	9
11. 6. 52, 2 B.	+ 0, 262. F. 1. + 0, 093. M. 4. + 0, 127. P.	1792. 1794. 1798. 1803.	19
15. 23. 12, 8 B.	+ 0, 124. F. 2.	1798. 1803.	8
4. 28. 16, 8 B.	+ 0, 232. F. 5. − 0, 006. M. 4. + 0, 093. P.	1792. 97. 1803.	19
19. 4. 47, 0 B.	− 0, 010. F. 1.	1795.* 1803.	9
16. 59. 39, 5 A.	+ 0, 974. F. 2. + 0, 920. R. 2. + 1, 143. P.	1794. 1800. 1803.	12
15. 57. 14, 8 B.	+ 0, 240. F. 2. + 0, 074. P.	1792. 98. 1803.	12
11. 40. 52, 2 A.	+ 0, 089. F. 2. − 0, 320. P.	1792. 1803.	10
10. 2. 51, 9 B.	− 0, 056. M. 3. − 0, 145. P.	1792. 98. 1803.	9
11. 19. 41, 0 A.	+ 0, 178. F. 3.	1795.* 1803.	9
19. 49. 31, 8 B.	− 0, 118. F. 4. − 0, 100. R. 1. − 0, 099. C. − 0, 064. M.	1795.* 1803.	7

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
7. Ariete	26°. 10'. 48'', 0	+ 0'', 210. F.	1798. 1800. 1803.	10
υ 1. Balena	26. 49. 15, 3	− 0, 173. F.	1798. 1803.	7
112. Pesci	27. 26. 16, 5	+ 0, 138. F.	1794. 1803.	7
υ. 2. Balena	27. 38. 32, 0	+ 0, 100. F.	1798. 1803.	8
α Pesci	27. 55. 34, 5	+ 0, 647. F. − 0, 085. C. − 0, 274. M. 2	1798. 1803.	6
10. Ariete	28. 5. 0, 2	+ 0, 332 F.	1798. 1803.	7
61. Balena	28. 23. 28, 3	− 0, 052. F.	1798. 1803.	7
α Arietis	28	. . . .	. . . .	. . .
15. Arietis	29. 53. 21, 0	+ 0, 413. F. + 0, 164. M. 1	1794. 1803.	7
63. Balena	30. 21. 30, 5	+ 0, 029. F.	1792. 1803.	12
ς. 1. Arietis	31. 45. 16, 2	+ 0, 366. F. + 0, 095 M. 2	1798. 1803.	7
69. Balena	32. 55. 27, 5	− 0, 264. F.	1798. 1803.	7
ρ. 1. Balena	34. 4. 10, 5	+ 0, 170. F.	1794. 1803.	7

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
22°. 35'. 28", 7 B.	− 0", 003. F. 4.	1798. 1800. 1803.	12
23. 30. 30, 1 A.	− 0, 027. F. 1. + 0, 200. P.	1791. 98. 1803.	8
2. 8. 6, 0 B.	− 0, 103. F. 7. − 0, 302. P.	1794. 1803.	8
22. 3. 5, 6 A.	+ 0, 054. F. 1.	1798. 1803.	7
1. 47. 34, 7 B.	+ 0, 167. F. 8. − 0, 018. C. + 0, 005. M. 2. − 0, 091. P.	1792. 98. 1803.	9
24. 57. 58, 8 B.	+ 0, 200. F. 4.	1798. 1803.	7
1. 18. 16, 2 A.	+ 0, 132. F. 2.	1798. 1803.	8
22. 30. 38, 13 B.	+ 0, 047. F. 20. + 0, 064. R. 2. − 0, 150. C. − 0, 124. M. 4. − 0, 029. MK. 3. − 0, 137. P.	1791. 94. 98. 1801. 801. 803.	35
18. 33. 2, 1 B.	+ 0, 065. F. 1. − 0, 023. M. 1.	1794.* 1803.	10
2. 46. 15, 0 A.	+ 0, 087. F. 2. + 0, 082. P.	1792. 1803.	11
18. 58. 10, 1 B.	+ 0, 110. F. 2. + 0, 029. M. 2. + 0, 200. P.	1792. 98. 1803.	12
0. 31. 26, 0 A.	+ 0, 142. F. 2. + 0, 200. P.	1792. 98. 1803.	10
13. 11. 52, 5 A.	+ 0, 202. F. 1.	1794.* 1803.	10

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
27. Ariete	34°. 57′. 27″, 5	+ 0″,610. F.	1795. 1803.	10
ν Balena	36. 20. 46, 0	+ 0, 218. F. − 0, 247. M. 1	1795. 1803.	8
ε Balena	37. 28. 19, 5	− 0, 169. F. − 0, 091. C.	1795. 1801. 1803.	12
39. Ariete	39. 0. 30, 5	+ 0, 571. H. + 1, 174 F. + 1, 087 C. − 0, 225. P.	1795. 1803.	7
ϖ Ariete	39. 32. 9, 6	+ 0, 203. F. + 0, 032. M. 3	1799. 1803.	4
σ Ariete	40. 6. 58, 0	+ 0, 700. F. + 0, 059. M. 2	1795. 1803.	8
ϱ. 1. Ariete.	40. 55. 52, 0	+ 0, 437. F.	1794. 1803.	7
ε Ariete.	41. 56. 56, 0	+ 0, 163 F. + 0, 102. M. 3	1798. 1803.	6
α Balena	43.	. . . .	. . . .	. . .
40. D. Eridano . .	61. 30. 57, 9	− 3, 376. H. − 2, 225. F. − 3, 625. La-L. − 3, 240. P.	1799. 1801. 1804.	10
La Capra	75.	. . . .	. . . .	. . .

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
16°. 48′. 44″, 0 B.	+ 0″, 135. F. 3.	1795.* 1803.	10
4. 42. 50, 1 B.	+ 0, 243. F. 1. − 0, 027. M. 1.	1795.* 1803.	9
12. 43. 39, 1 A.	− 0, 095. F. 2. − 0, 140. C.	1795.* 1801. 1803.	15
28. 24. 29, 0 B.	− 0, 056. F. 2. − 0, 121. C.	1795.* 1803.	10
16. 37. 27, 8 B.	+ 0, 238. F. 3. − 0, 022. M. 3.	1799. 1803.	7
14. 15. 0, 4 B.	+ 0, 278. F. 3. − 0, 002. M. 2.	1795.* 1803.	7
16. 54. 48, 0 B.	+ 0, 173. F. 3.	1795.* 1803.	8
20. 31. 55, 6 B.	+ 0, 208. F. 2. + 0, 005. M. 3.	1798. 1803.	8
3. 17. 50, 12 B.	+ 0, 054. F. 13. − 0, 032. R. 1. − 0, 035. C. − 0, 141. M. 2. − 0, 280. MK. 3. − 1, 375. P.	1792. 93. 97. 1799. 1801. 1804.	24
7. 58. 21, 2 A.	− 3, 693. H. − 3, 580. F. 2. − 4, 405. LaL. 2. − 3, 781. P.	1799. 1801. 1804.	11
45. 46. 39, 33 B.	− 0, 390. F. 4. − 0, 306. B. 2. − 0, 395. C. − 0, 395. M. 25. − 0, 328. MK. 7. − 0. 339. P.	1792. 94. 1803.	21

Movimenti proprj colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.R.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
ρ Leonis	155°. 33′. 59″, 4	+ 0″,120. F. 0, 000. M. 4	1795. 96. 1803	10
41. Leon min.re . .	158. 8. 42, 3	+ 0, 718. F.	1797. 1803.	15
α Tazza	162. 30. 33, 0	− 1, 182. F. − 0, 522. C. − 0, 22= P.	1795. 1803.	8
χ Leone	163. 40. 19, 0	− 0, 015. F. − 0, 478. M. 3	1795. 97. 1803.	30
75. Leone	166. 44. 50, 0	+ 0, 041. F.	1795. 99. 1803.	11
89. Leone	171. 1. 47, 0	+ 0, 075. F.	1795. 1802. 803.	10
Denebola . . .	174. 42. 39, 5	− 0, 441. F. − 0, 404. C. − 0, 556. M. 3 − 0, 526. MK.58	Comparata col Sole nel 1797.	
β Vergine	175.	. . . .	. . . .	. . .
β Idra	175. 42. 29, 4	+ 0, 360. C.	1795. 1803.	6
η Tazza	176. 27. 32, 0	− 0, 219. F. − 0, 000 P.	1795. 1803.	10
π Vergine	177. 39. 14, 0	+ 0, 233. F. − 0, 079. M. 3	1795. 1803.	6

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
10°. 19′. 55″, 95 B.	+ 0″, 211. F. 5. − 0, 004. M. 6. − 0, 058. P.	1792. 1803.	12
24. 13. 55, 4 B.	+ 0, 109. F. − 0, 171. P.	1792. 97. 1803.	25
17. 14. 9, 9 A.	+ 0, 081. F. 2. − 0, 240. C. 0, 000. P.	1792. 1803.	11
8. 24. 54, 9 B.	− 0, 037. F. 6. 0, 000. M. 3. − 0, 219. P.	1792. 97. 1803.	26
3. 6. 32, 1 B.	− 0, 031. F. 3.	1795. 99. 1803.	12
4. 10. 14, 7 B.	− 0, 052. F. 2.	1795. 1802. 1803.	10
15. 41. 26, 08 B.	− 0, 007. F. 18. − 0, 168. C. − 0, 095. M. 4. − 0, 088. MK. 3. − 0, 269. P.	1792. 96. 1801. 1802. 1803.	63
2. 53. 31, 59	− 0, 360. F. 9. − 0, 372. C. − 0, 196. M 3. − 0, 279. MK. 3. − 0, 733. P.	1794. 97. 99. 1801. 1802. 803.	61
32. 47. 43, 4 A.	− 0, 700. C. − 0, 167. P.	1792. 1803.	20
16. 2. 11, 44 A.	− 0, 076. F. 1. − 0, 171. P.	1792. 1803.	22
7. 43. 49, 2 B.	+ 0, 083. F. 5. − 0, 051. M. 4. − 0, 157. P.	1792. 1803.	24

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
ο Vergine.	178°. 45'. 8'', 9	− 0'',239. F. − 0, 377. M. 2	1795. 1802. 1803.	12
α Corvo	179. 31. 44, 07	+ 0, 164. F. − 0, 006. C.	1796. 99. 1800. 1801. 802. 1803.	35
ς Berenice	180. 29. 24, 0	− 0, 646. F.	1795. 1803.	7
γ Corvo	181. 22. 59, 3	− 0, 386. F. − 0, 167. C.	1795. 99. 1803.	10
η Vergine.	182. 25. 6, 0	− 0, 045. F. + 0, 013. C. − 0, 277. M. 2	1796. 1803.	8
δ Corvo.	184. 52. 55, 5	− 0. 405 F. − 0, 293. C.	1796. 1802. 1803.	10
β Corvo	185, 58. 29, 7	− 0, 033. F. − 0, 011. C.	1795. 96. 1803.	8
γ. 1. Vergine . . .	187. 52. 54, 9	− 0, 700 F. - 0, 575 C. − 0, 702. M. 2	1795. 1803.	7
27. Berenice. . . .	189. 9. 39, 9	− 0, 145. F.	1796. 1803.	6
31. Berenice. . . .	190. 29. 1, 9	+ 0, 44::: F. + 0, 042. P.	1795. 1796. 1799. 1800. 803.	18
35. Berenice. . . .	190. 51. 32, 7	+ 0, 055. F.	1796. 1803.	7

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
9°. 50′. 41″, 9 B.	+ 0″, 096. F. 4. + 0, 040. M. 3. + 0, 091. P.	1792. 1803.	22
23. 36. 43, 37 A.	− 0, 043. F. 3. − 0, 020. C. − 0, 289. P.	1792. 99. 1800. 1801. 802. 803.	42
21. 39. 26, 0 B.	+ 0, 014. F. 3.	1795. 1803.	9
16. 25. 46, 38 A.	− 0, 034. F. 3. + 0, 076. C. − 0, 204. P.	1792. 95. 1803.	20
0. 26. 48, 0 B.	+ 0, 002. F. 4. − 0, 156. C. + 0, 003. M. 3. − 0, 079. P.	1792. 96. 1803.	19
15. 23. 57, 9 A.	− 0, 164. F. 3. − 0, 096. C. − 0, 235. P.	1792. 1802. 1803.	26
22. 17. 17, 2 A.	− 0, 002. F. 2. − 0, 094. C. − 0, 124. P.	1792. 95. 96. 1803.	20
0. 20. 58, 1 A.	+ 0, 339. F. 6. − 0, 128. C. − 0, 001. M. − 0, 179. P.	1792. 95. 1803.	15
17. 40. 24, 5 B.	+ 0, 048. F. 2. + 0, 023. P.	1792. 96. 1803.	14
28. 37. 57, 6 B.	+ 0, 02::. F. 1.	1795. 1800. 1803.	10
22. 20. 8, 9 B.	+ 0, 025. F. 3. − 0, 375. P.	1792. 96. 1803.	14

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
Cuor di Carlo. . .	191°. 39′. 36″, 3	− 0″,014. F. − 0, 296. C.	1782. 1803.	4
ε Vergine.	193. 3. 12, 2	− 0, 241. F. − 0, 159. C. − 0, 356. M. 2	1795. 96. 99. 1803.	14
14. Cani da Caccia	194. 5. 25, 5	+ 0, 373. F.	1798. 1803.	8
ϑ Vergine	194. 53. 58, 5	+ 0, 265. F. − 0, 100. C. − 0, 321. M. 1	1795. 1803.	6
56. Vergine	196. 4. 11, 6	− 0, 291. F. + 0, 6::::. P.	1795. 1799. 1802. 1803.	12
γ Idra	197. 1. 1, 5	− 0, 296. F. 0, 000 C. − 0, 100. M. 1	1796. 1803.	8
537. Mayer	197. 53. 35, 5	− 0, 235. M. 1	1798. 99. 1803.	8
Spica.	198.	. . . .	. . . .	. . .
70. Vergine	199. 39. 41, 0	− 0, 418. F.	1795. 1803.	8
h Vergine	200. 36. 39, 8	− 0, 078 F. − 0, 210. M. 4 − 0, 130. P.	1796. 1803.	11
ζ Vergine	201. 7. 33, 7	− 0, 260. F. − 0, 255. C. − 0, 646. M. 5	1796. 97. 1803.	11

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
39°. 24′. 5″, 75 B.	— 0″, 157. F. 1. + 0, 079. C. — 0, 170. P.	1791. 92. 1803.	23
12. 2. 17, 7 B.	+ 0, 080. F. 5. — 0, 060. C. + 0, 030. M. 2. + 0, 018. P.	1792. 1795. 1796. 1803.	24
36. 52. 22, 4 B.	— 0, 145. F. — 0, 043. P.	1792. 98. 1803.	18
4. 28. 1, 0 A.	+ 0, 280. F. 5. — 0, 153. C. — 0, 068. M. 1. — 0, 240. P.	1792. 95. 1803.	24
9. 18. 14, 9 A.	— 0, 162. F. 1. — 0, 3[illegible]. P.	1795. 1799. 1802. 1803.	13
22. 6. 40, 2 A.	— 0, 025. F. 5. — 0, 026. C. — 0, 083. M. 1. — 0, 150. P.	1792. 96. 1803.	11
11. 31. 36, 2 A.	— 0, 068. M. 1.	1798. 99. 1803.	11
10. 6. 43, 14 A.	— 0, 055. F. 16. — 0, 071. C. — 0, 067. M. 10. — 0, 019. MK. 17. — 0, 270. P.	1791. 92. 93. 1797. 99. 1800. 1802. 1803.	59
14. 51. 7, 0 B.	— 0, 497. F. 2. — 0, 477. P.	1795.* 1803.	9
9. 7. 44, 6 A.	— 0, 054. F. 1. — 0, 119. M. 4.	1796. 1803.	9
0. 25. 56, 8 B.	+ 0, 184. F. 16. + 0, 062. C. + 0, 038. M. 5. + 0, 085. P.	1792. 96. 1803.	20

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
81. Vergine	201°.46'. 46", 5	− 0",695. F. − 0, 375. P.	1795. 96. 1803.	13
m Vergine.	202. 46. 50, 0	− 0, 086. F. − 0, 304. M. 4	1795. 1803.	6
o Vergine.	203. 15. 6, 6	− 0, 218. F.	1795. 1803.	12
ν Centauro	204. 23. 25, 2	− 0, 204. C.	1795. 1803.	6
6. Boote	205. 3. 43, 8	+ 0, 165. F.	1795. 1796. 1800. 1803.	18
η Boote	206. 17. 19, 9	+ 0, 082. F. + 0, 176. C.	1795. 1796. 1797. 1803.	18
τ Vergine	207. 52. 4, 5	− 0, 167. F.	1796. 1803.	7
ϑ Centauro.	208. 44. 27, 0	+ 0, 091. F. − 0, 600 C. − 0, 694 M. 3 − 0, 470. P.	1796. 1803.	8
96. Vergine	209. 35. 29, 6	+ 0, 511. F. + 0, 711. P.	1795. 96. 1803.	12
κ Vergine	210. 33. 35, 0	− 0, 198. F. − 0, 066. C. − 0, 195. M. 6	1796. 97. 1803.	13
14. Boote	211. 6. 56, 5	− 0, 295. F.	1795. 1802. 1803.	11
Arturo	211.	. . . .	. . . .	. . .

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
6°. 50'. 44", 6 A.	− 0", 366. F. 1. − 0, 300. P.	1795. 96. 1803.	16
7. 41. 16, 9 A.	0, 000. F. 1. − 0, 068. M. 4. − 0, 273. P.	1792. 95. 1803.	16
4. 33. 22, 4 B.	− 0, 111. F. 5.	1795.* 1803.	10
40. 40. 59, 0 A.	+ 0, 050. C.	1795.* 1803.	7
22. 15. 46, 2 B.	+ 0, 086. F. 1.	1795.* 1803.	10
19. 24. 22, 8 B.	− 0, 302. F. 1. − 0, 491. C. − 0, 631. P.	1792. 95. 1803.	19
2. 31. 10, 1 B.	+ 0, 020. F. 1. − 0, 220. P.	1792. 96. 1803.	18
35. 22. 39, 4 A.	− 0, 467. F. 1. − 0, 521. C. − 0, 411. M. 3. − 0, 579. P.	1792. 96. 1803.	22
9. 22. 46, 5 A.	+ 1, 000. F. 2. − 0, 184. P.	1792. 95. 96. 1803.	11
9. 20. 6, 9 A.	− 0, 310. F. 14. − 0, 030. C. + 0, 047. M. 6. − 0, 280. P.	1792. 1796. 1797. 1803.	24
13. 54. 16, 0 B.	+ 0, 104. F. 2.	1795. 1802. 1803.	16
20. 13. 48, 98	− 1, 954. F. 8. − 2, 213. R. 2. − 1, 928. C. − 1, 977. M. 29. − 1, 924. MK. 20. − 2, 289. P.	1791. 92. 93. 1799. 1800. 1802. 1803.	68

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
υ. 1. Vergine	212°. 18′. 39″, 6	– 0″,763. F. – 0, 280. P.	1796. 1802. 1803.	12
υ. 2. Vergine. . . .	212. 55. 10, 0	– 0, 167. F.	1796. 1803.	8
8. Idra	214. 7. 27, 0	+ 0, 345. F.	1795. 97. 1803.	14
ρ Boote	215. 48. 1, 0	+ 0, 164. F.	1796. 1803.	6
σ Boote	216. 29. 28, 2	+ 0, 337. F.	1796. 1803.	9
ζ Boote.	217. 53. 59, 1	+ 0, 636 F. + 0, 202. C.	1794. 97. 1803.	12
ε Boote	219. 3. 39, 2	+ 0, 367. F. – 0, 113. C.	1796. 1803.	8
α. 1. Libra	219	. . . .	. . . .	. . .
α. 2. Libra.	219	. . . .	. . . .	. . .
ξ Boote	220. 32. 27, 1	+ 0, 491. F.	1794. 1803.	9
β Lupo	221. 22. 27, 0	+ 0, 059. C.	1796. 1803.	7
δ Libra	222. 34. 30, 6	– 0, 491. F. – 0, 296. M. 5.	1796. 1803.	7
γ Scorpione	223. 5. 55, 0	– 0, 226. F. – 0, 026. C. + 0, 049. M. 3	1796. 1803.	6

Di Stelle

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
1°. 19′. 59″, 0 A.	− 0″, 051. F. 3. − 0, 284. P.	1792. 1796. 1802. 1803.	22
1. 3. 56, 7 A.	− 0, 044. F. 2. − 0, 150. P.	1792. 96. 1803.	18
28. 35. 1, 9 A.	+ 0, 078. F. 1. − 0, 362. P.	1792. 1795. 1797. 1803.	24
31. 15. 22, 4 B.	− 0, 004. F. 2.	1796. 1803.	12
30. 37. 16, 1 B.	+ 0, 069. F. 2.	1796. 1803.	12
14. 35. 41, 3 B.	+ 0, 232. F. 1. − 0, 087. C. − 0, 202. P.	1792. 94. 1803.	18
27. 55. 30, 7 B.	+ 0, 079. C. + 0, 012. P.	1791. 1792. 1796. 1803.	17
15. 9. 19, 5 A.	− 0, 186. F. 4. − 0, 145. M. 4.	1796. 1802. 803.	14
15. 12. 3, 0 A.	− 0, 176. F. 14. − 0, 077. C. − 0, 145 M. 6. − 0, 124. MK. 7. − 0, 184. P.	1792. 1796. 1802. 1803.	20
19. 56. 18, 4 B.	+ 0, 039. F. 1.	1794. 1803.	11
42. 18. 56, 9 A.	− 0, 159. C. − 0, 282. P.	1792. 96. 1803.	18
7. 42. 54, 3 A.	+ 0, 043. F. 2. − 0, 047. M. 5.	1796. 1803.	9
24. 29. 6, 0 A.	− 0, 005. F. 3. − 0, 036. C. − 0, 182. M. 3. − 0, 255. P.	1794. 96. 1803.	15

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
ι. 1. Libra	223°. 52′.20″, 1	− 0″,384. F. − 0, 106. M. 3	1796. 1803.	10
c Boote	224. 37. 42, 9	+ 1, 017. F. + 0, 800. P.	1796. 1803.	11
ι 1. Libra	225. 12. 37, 3	− 0, 450. F. − 0, 130. M. 3	1793. 97. 1802. 1803.	14
ι 2. Libra	225. 29. 13, 5	− 0, 470. F. − 0, 036. M. 2	1792. 1796. 1797. 1803.	17
β Libra.	226. 33. 52, 7	− 0, 395. F. − 0, 102. C. − 0, 285. M. 4	1794. 96. 97. 1802. 1803.	20
δ Boote.	226. 51. 28, 5	+ 0, 028. C.	1792. 96. 1803.	15
ε Libra	228. 20. 38, 5	− 0, 345 F. − 0, 233. M. 4	1794. 1802. 1803.	10
9. Serpente	229. 7. 44, 3	+ 0, 055. F.	1794. 1800. 1803.	15
β Corona Bor. . .	229. 53. 45, 0	+ 0, 336. F.	1792. 1796. 1797. 1803.	18
Gemma	231	. . . .	. . . .	. . .
χ Serpente	233. 5. 43, 5	− 0, 074. F.	1794. 1800. 1803.	10
x Serpente	233	. . . .	. . . .	. . .

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
15°. 28'. 14", 6 A.	− 0", 003. F. 2. − 0, 136. M. 3.	1796. 1803.	10
25. 39. 22, 7 B.	− 0, 083. F. 3.	1796. 1803.	11
19. 1. 26, 0 A.	− 0, 052. F. 6. − 0, 179. M. 3. − 0, 180. P.	1792. 1793. 1797. 1803.	28
18. 52. 59, 9 A.	− 0, 150. F. 3. − 0, 117. M. 2. − 0, 252. P.	1792. 1796. 1797. 1803.	28
8. 38. 4, 5 A.	+ 0, 147. F. 3. − 0, 083. C. − 0, 108. M. 5. − 0, 123. P.	1792. 1794. 1796. 1803.	24
34. 4. 8, 4 B.	− 0, 164. C. − 0, 378. P.	1791. 1792. 1796. 1803.	22
9. 35. 33, 3 A.	− 0, 268. M. 4. − 0, 373. P.	1792. 94. 1803.	19
16. 8. 27, 6 B.	+ 0, 247. F. 1. − 0, 467. P.	1794. 1803.	11
29. 48. 13, 8 B.	+ 0, 150. F. 2. − 0, 100. P.	1792. 1796. 1797. 1803.	27
27. 23. 47, 2 B.	− 0, 190. F. 6. − 0, 374. C. − 0, 109. MK. 5. − 0, 413. P.	1791. 92. 93. 1797. 98. 1803.	40
13. 29. 56, 7 B.	+ 1, 278. F. 1. − 2, 202. P.	1792. 94. 1803.	20
7. 3. 54, 3 B.	+ 0, 071. F. 9. − 0, 042. C. − 0, 019. M. 4. + 0, 085. MK. 3. − 0, 206. P.	1791. 92. 96. 98. 1799. 1800. 803.	45

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
λ Serpente	234°. 11'. 4",9	− 0",082. F.	1801. 1803.	10
ε Serpente	235. 12. 43, 7	+ 0, 020. F. + 0, 210. C.	1801. 1802. 1803.	16
ρ Serpente	235. 37. 11, 1	− 0, 277. F.	1792. 1803.	7
γ Serpente	236. 48. 18, 0	+ 0, 072. F. + 0, 289. C.	1802. 1803.	17
3. Ercole.	237. 43. 56, 0	+ 4, 1:::. F.	1792. 96. 1803.	10
β Scorpione	238. 27. 21, 9	− 0, 591. F. − 0, 032. C. + 0, 011. M. 5	1793. 94. 1803.	12
633. Mayer	238. 27. 32, 0	− 0, 028. M. 5	1801. 1803.	6
11. Scorpione . . .	239. 7. 41, 2	+ 0, 460. F.	1794. 1803.	6
q Ercole.	239. 56. 26, 4	+ 0, 507. F.	1801. 1803.	9
δ Ofiuco	240. 58. 5, 5	+ 0, 117. F. + 0, 014. C.	1792. 1800. 1802. 1803.	15
ε Ofiuco	241. 56. 12, 3	− 0, 054. F. − 0, 008. C.	1792. 1794. 1800. 1803.	15
γ Ercole	243. 16. 25, 5	+ 0, 509. F. + 0, 042. C.	1792. 96. 1803.	9

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.				ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
7°. 59′. 22″, 5 B.	+ 0″,	224.	F.	1.	1792. 1801. 1803.	21
	− 0,	155.	P.			
5. 5. 25, 4 B.	+ 0,	112.	F.	3.	1791. 1801. 1803.	24
	− 0,	011.	C.			
	− 0,	127.	P.			
21. 35. 20, 2 B.	+ 0,	269.	F.	1.	1792. 1803.	12
	− 0,	300.	P.			
16. 19. 29, 3 B.	− 1,	014.	F.	4.	1792. 1803.	17
	− 1,	264.	C.			
	− 1,	437.	P.			
4. 59. 52, 9 B.	− 0,	509.	F.	*.	1792. 96. 1803.	17
	− 0,	091.	P.			
19. 14. 40, 95 A.	− 0,	058.	F.	20.	1792. 1793. 1794. 1803.	25
	− 0,	004.	C.			
	− 0,	106.	M.	5.		
	− 0,	164.	P.			
19. 14. 28, 2 A.	− 0,	087.	M.	5.	1801. 1803.	8
12. 11. 41, 6 A.	+ 0,	074.	F.	2.	1794. 1803.	10
	− 0,	267.	P.			
17. 44. 48, 7 B.	− 0,	145.	F.	1.	1796. 1801. 1803.	11
3. 10. 3, 4 A.	+ 0,	101.	F.	3.	1791. 1792. 1794. 1803.	20
	− 0,	166.	C.			
	− 0,	570.	P.			
4. 11. 32, 5 A.	+ 0,	137.	F.	2.	1792. 94. 1803.	17
	− 0,	021.	C.			
	− 0,	112.	P.			
19. 37. 58, 3 B.	+ 0,	053.	F.	2.	1792. 96. 1803.	12
	+ 0,	008.	C.			

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
Antares	244°.	. . . .	. . . .	. . .
9 Ercole	267. 20. 54, 0	{ − 1, 154. F. { + 0, 094. C.	1801. 1803.	10
o Ofiuco	267. 39. 23, 4	+ 0, 189. F.	1792. 1803.	6
τ Ofiuco	268. 2. 48, 7	+ 0, 288. F.	1801. 1803.	9
γ Sagittario	268. 14. 20, 4	{ − 0, 139. C. { − 0, 145. M. 1	1792. 1802. 1803.	10
p Ofiuco	268, 50. 15, 0	+ 0, 654. F.	1792. 1802. 1803.	10
1495. C. A.	268. 51. 14, 9	{ + 0, 160. C. { + 0, 121. M. 1 { + 0, 205. P.	1792. 1803.	7
ς. 1. Ofiuco.	269. 26. 6, 6	+ 0, 436. F.	1793. 1803.	7
ς. 2. Ofiuco.	269. 27. 57, 0	− 0, 187. F.	1794. 1801. 1803.	7
μ. 1. Sagittario. . .	270. 27. 0, 3	{ − 0, 463. F. { − 0, 040. C. { − 0, 145. M. 3	1792. 96. 97. 1800. 1803.	30
μ. 2. Sagittario. . .	270. 49. 12, 7	{ − 0, 491. F. { − 0, 031. M. 5	1792. 97. 1803.	20
1504. C. A.	271. 22. 58, 5	+ 0, 401. C.	1792. 1803.	9

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
25°. 58′. 26″, 5 A.	− 0″, 213. F. 23. − 0, 013. C. − 0, 123. M. 9. − 0, 146. MK. 9. − 0, 107. P.	1792. 93. 97. 98. 1799. 1800. 1803.	60
37. 17. 8, 6 B.	+ 0, 061. F. 1. + 0, 041. C.	1801. 1803.	9
2. 57. 16, 5 B.	+ 0, 174. F. 3. − 0, 291. P.	1792. 1803.	12
8. 9. 58, 5 A.	+ 0, 084. F. 2.	1801. 1803.	12
30. 24. 35, 0 A.	− 0, 138. C. − 0, 151. M. 2. − 0, 318. P.	1792. 1803.	12
2. 33. 32, 4 B.	− 1, 024. F. 3. − 0, 831. P.	1792. 1802. 1803.	18
28. 27. 48, 4 A.	− 0, 260. C. − 0, 215. M. 1. − 0, 273. P.	1792. 1803.	12
8. 43. 15, 8 B.	+ 0, 097. F. 2. − 0, 430. P.	1793. 1803.	12
9. 32. 53, 1 B.	+ 0, 087. F. 3. − 0, 014. P.	1794. 1801, 1803.	11
21. 5. 44, 6 A.	+ 0, 005. F. 7. + 0, 172. C. − 0, 018. M. 5. − 0, 181. P.	1792. 1796. 1797. 1803.	20
20. 46. 20, 5 A.	− 0, 040. F. 4. − 0, 060. M. 6. − 0, 260. P.	1792. 1803.	14
27. 5. 56, 5 A.	− 0, 253. C. − 0, 368. P.	1792. 1803.	18

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
δ Sagittario.	272°. 2'. 44", 7	+ 0",641. F. + 0, 292. C. + 0, 395. M. 5	1792. 1796. 1802. 1803.	12
η Serpente	272. 44. 24, 4	− 0, 736. F. − 0, 647. C.	1792. 1802. 1803.	25
κ Lira.	273. 12. 49, 0	− 0, 155. F.	1791. 1802. 803.	14
109. Ercole	273. 47. 36, 0	+ 0, 118. F.	1792. 1803.	9
D Serpente	274. 14. 36, 0	− 0, 489. F.	1793. 1803.	12
Wega	277	. . . .	. . . .	. . .
φ Sagittario	278. 17. 17, 7	+ 0, 343. F. − 0, 028. C. + 0, 108. M. 4	1792. 1803.	8
28. Sagittario . . .	278. 34. 9, 0	− 0, 791. F. − 0, 546. P.	1792. 1803.	10
4. Aquila	278. 40. 55, 5	+ 0, 212. F.	1792. 1803.	10
29. Sagittario . . .	279. 26. 52, 5	− 0, 381. F. − 0, 059. M. 5	1792. 1803.	10
ζ Lira.	279. 28. 11, 5	+ 0, 631. F.	1792. 96. 1803.	18

Di Stelle

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
29°. 53′. 49″, 7 A.	− 0″, 026. F. 6. − 0, 075. C. − 0, 145. M. 7. − 0, 343. P.	1792. 1803.	11
2. 56. 15, 1 A.	− 0, 520. F. 2. − 0, 596. C. − 0, 923. P.	1792. 1802. 1803.	18
35. 59. 0, 5 B.	− 0, 124. F. 1. + 0, 054. P.	1791. 92. 1803.	17
21. 41. 26, 4 B.	− 0, 138. F. 2. − 0, 466. P.	1792. 1803.	11
0. 5. 26, 7 B.	+ 0, 045. F. 1. − 0, 059. P.	1793. 1803.	12
38. 36. 21, 70 B.	+ 0, 212. F. 3. + 0, 146. R. 3. + 0, 266. C. + 0, 300. M 14. + 0, 403. MK. 19. + 0, 250. P.	1791. 92. 93. 1794. 1802. 1803.	100
27. 10. 49, 0 A.	− 0, 040. F. 14. + 0, 053. C. 0, 000. M. 6. − 0, 137. P.	1792. 1803.	12
22. 35. 9, 9 A.	− 0, 030. F. 1. − 0, 127. P.	1792. 1803.	14
1. 52. 11, 0 B.	+ 0, 133. F. 1. − 0, 420. P.	1792. 1803.	13
20. 32. 13, 4 A.	+ 0, 158. F. 3. − 0, 027. M. 7. − 0, 170. P.	1792. 1803.	17
37. 24. 17, 8 B.	+ 0, 134. F. 2. + 0, 021. P.	1792. 96. 1803.	17

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
31. Sagittario . . .	280°. 1'.44",0	− 0",390. F. − 0, 130. M. 2	1792. 1803.	8
7. Aquila	280. 8. 57, 0	− 0, 126. F.	1792. 1803.	9
8. Aquila.	280. 12. 50, 4	+ 0, 156. F.	1792. 1803.	9
β Lira.	280. 40. 25, 5	− 0, 128. F. + 0, 102. C.	1792. 1803.	13
σ Sagittario	280. 42. 46, 5	+ 0, 266. F. − 0, 053. C. − 0, 027. M. 5	1792. 1803.	20
1561. C. A.	280. 58. 22, 0	+ 0, 140. C.	1792. 96. 1803.	14
δ. 1. Lira	281. 41. 4, 2	+ 0, 640. F.	1793. 96. 1803.	13
δ. 2. Lira	281. 52. 36, 9	+ 0, 332. F. − 0, 113. C.	1796. 1803.	14
10. Aquila	282. 24. 0, 0	+ 0, 127. F.	1792. 1803.	9
ζ Sagittario	282. 28. 3, 7	+ 0, 918. F. + 0, 083. C. + 0, 019. M. 6	1792. 1803.	20
759. Mayer	282. 33. 7, 5	Æ.erronea in M.1	1796. 1803.	8
γ Lira.	282. 51. 49, 7	+ 0, 182 F. + 0, 023. C.	1793. 1796. 1797. 1803.	10
λ Lira	283. 6. 57, 0	− 0, 110. F.	1793. 1802. 803.	10

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
22°. 8′. 25″, 8 A.	− 0″, 396. F. 4. − 0, 136. M. 2. − 0, 143. P.	1792. 1803.	14
3. 28. 40, 5 A.	+ 0, 107. F. 1. − 0, 400. P.	1792. 1803.	13
3. 32. 16, 7 A.	+ 0, 121. F. 1. − 0, 255. P.	1792. 1803.	11
33. 8. 23, 0 B.	− 0, 083. F. 2. − 0, 098. C. − 0, 097. P.	1791. 92. 1803.	17
26. 31. 45, 5 A.	− 0, 169. F. 2. + 0, 027. C. − 0, 115. M. 6. − 0, 317. P.	1792. 1803.	16
23. 24. 47, 0 A.	− 0, 009. C.	1792. 1803.	10
36. 43. 50, 5 B.	− 0, 040. F. 1. + 0, 186. P.	1791. 1793. 1796. 1803.	27
36. 39. 11, 5 B.	− 0, 007. F. 2. − 0, 030. C. − 0, 092. P.	1791. 96. 1803.	38
13. 39. 2, 6 B.	+ 0, 161. F. 1. − 0, 145. P.	1792. 1803.	10
30. 9. 0, 6 A.	− 0, 153. F. 2. + 0, 051. C. − 0, 040. M. 9. − 0, 082. P.	1792. 1803.	14
25. 6. 27, 0 A.	− 0, 240. M. 1.	1796. 1803.	10
32. 25. 28, 4 B.	0, 000. F. 4. − 0, 070. C. − 0, 416. P.	1793. 1803.	8
31. 52. 30, 6 B.	− 0, 066. F. 2. − 0, 080. P.	1792. 1802. 1803.	15

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.R.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
ο Sagittario	283°. 10′. 18″, 0	+ 0″,045. C. − 0, 049. M. 6	1792. 97. 1803.	9
τ Sagittario.	283. 36. 36, 3	+ 0, 474. F. + 0, 034. C. − 0, 089. M. 6 − 0, 191. P.	1792. 1803.	10
762. Mayer	283. 43. 33, 3	0, 000. M. 1	1796. 1803.	8
λ Aquila	283. 54. 22, 5	− 0, 057. C.	1792. 96. 1803.	15
ϖ Sagittario	284. 27. 48, 8	− 0, 605. F. − 0, 074. R. − 0, 079. C. − 0, 164. M. 6 − 0, 250. P.	1792. 1796. 1797. 1803.	24
ψ Sagittario	285. 48. 58, 5	− 0, 004. F. − 0, 017. M. 3	1792. 1803.	10
D Sagittario. . . .	286. 28. 48, 0	− 0, 181. M. 4	1792. 1803.	13
24. Aquila.	287. 9. 7, 0	+ 0, 195. F.	1792. 1803.	8
1593. C. A.	288. 0. 14, 4	+ 0, 700. C.	1792. 1803.	9
1598. C. A.	288. 34. 10, 0	+ 0, 060. C.	1792. 1803.	13
υ Aquila	289. 4. 10, 5	+ 0, 075. F.	1793. 1803.	7
ο Aquila	289. 43. 23, 1	+ 0, 173. F.	1792. 1803.	13

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
22°. 1'. 8", 4 A.	+ 0", 147. C. − 0, 036. M. 8. − 0, 164. P.	1792. 1803.	9
27. 56. 49, 7 A.	− 0, 415. F. 2. − 0, 168. C. − 0, 294. M. 7. − 0, 374. P.	1792. 1803.	15
28. 55. 46, 5 A.	− 0, 259. M. 1.	1796. 1803.	8
5. 10. 9, 2 A.	− 0, 006. C. − 0, 221. P.	1792. 1803.	10
21. 19. 36, 2 A.	+ 0, 030. F. 4. − 0, 127. R. 2. + 0, 119. C. − 0, 085. M. 8. − 0, 135. P.	1792. 96. 1803.	22
25. 35. 11, 8 A.	− 0, 025. F. 2. − 0, 095. M. 6. − 0, 143. P.	1792. 1803.	13
19. 17. 41, 1 A.	− 0, 055. M. 6. − 0, 113. P.	1792. 1803.	14
0. 0. 45, 2 A.	+ 0, 069. F. − 0, 080. P.	1792. 1803.	11
28. 14. 15, 6 A.	decl. dubbia in C. − 0, 223. P.	1792. 1803.	13
30. 7. 24, 3 A.	− 0, 220. C. − 0, 125. P.	1792. 1803.	13
0. 2. 52, 5 A.	+ 0, 169. F. 2. − 0, 130. P.	1793. 1803.	10
1. 33. 17, 1 B.	+ 0, 104. F. 2. − 0, 258. P.	1792. 1803.	11

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
β Cigno	290°.39′.45″, 0	+ 0″,700. F. + 0, 010. R. + 0, 072. C.	1792. 1803.	12
χ Aquila.	293. 17. 11, 4	+ 0, 221. F.	1792. 1803.	12
γ Aquila	294	. . . .	. . . .	. . .
χ Cigno	294. 42. 29, 0	+ 0, 897. F.	1793. 1803.	8
Atair	295	. . . .	. . . .	. . .
56. Aquila.	295. 49. 4, 2	+ 0, 279. F.	1792. 1803.	9
β Aquila	296.	. . . .	. . . .	. . .
15. Volpe	298. 12. 55, 6	Æ. erronea in F.	1792. 1802. 803.	14
τ Aquila	298. 35. 22, 5	+ 0, 409. F.	1793. 1803.	10
818. Mayer	299. 23. 37, 8	− 0, 081. M. 1	1796. 1803.	13
20. Volpe	300. 54. 17, 5	+ 0, 473. F.	1793. 1803.	9

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
27°. 32′. 57″, 2 B.	+ 0″, 128. F. 9. − 0, 170. R. 1. + 0, 023. C. − 0, 164. P.	1792. 1803.	14
11. 22. 1, 9 B.	+ 0, 032. F. 2. − 0, 300. P.	1792. 1803.	14
10. 8. 12, 70 B.	+ 0, 093. F. 11. − 0, 184. R. 3. + 0, 053. C. + 0, 070. MK. 3. − 0, 299. P.	1792. 1793. 1802. 1803.	21
33. 16. 16, 6 B.	− 0, 311. F. 1. − 0, 400. P.	1793. 1803.	10
8. 21. 8, 45 B.	+ 0, 501. F. 17. + 0, 158. R. 3. + 0, 381. C. + 0, 398. M. 29. + 0, 666. MK. 26. + 0, 389. P.	1792. 1793. 1802. 1803.	22
9. 4. 48, 4 A.	+ 0, 159. F. 1. − 0, 128. P.	1792. 1803.	9
5. 55. 6, 98 B.	− 0, 438. F. 15. − 0, 483. C. − 0, 457. MK. 3. − 0, 918. P.	1792. 1798. 1802. 1803.	33
27. 12. 35, 1 B.	+ 0, 157. F. 1. − 0, 226. P.	1792. 1803.	7
6. 43. 28, 8 B.	+ 0, 162. F. 1. − 0, 192. P.	1793. 1803.	11
10. 37. 46, 8 A.	− 0, 053. M. 1.	1796. 1803.	13
25. 53. 26, 3 B.	+ 0, 280. F. 2. − 0, 110. P.	1793. 1803.	8

Movimenti proprj colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
α. 1. Capricorno. .	301°.	. . . .	. . . . , .	. . .
α. 2. Capricorno. .	301.	. . . .	. . . .	. . .
25. Volpe	303. 21. 47, 4	+ 0, 327. F.	1792. 1803.	8
γ Cigno.	303. 45. 42, 3	+ 0, 845. F. 0, 000. R. + 0, 104. C.	1798. 1803.	12
H Cigno	303. 58. 4, 8	− 1, 130. F.	1793. 1803.	13
68. Aquila.	304. 28. 51, 0	+ 0, 228. F.	1792. 1803.	9
69. Aquila.	304. 47. 42, 4	+ 0, 155. F.	1792. 1803.	14
ω. 1. Cigno.	305. 13. 47, 0	+ 0, 112. F.	1797. 1801. 803.	17
42. Cigno	305. 25. 33, 0	+ 0, 449. F.	1793. 1803.	7
ε Delfino	305. 54. 44, 5	+ 0, 126. R. + 0, 064. C.	1792. 93. 1803.	10
α. 2. Cigno.	305. 57. 51, 0	+ 0, 240. F.	1797. 1803.	10
ζ Delfino.	306. 20. 14, 3	+ 0, 044. C.	1792. 1802. 803.	15

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
13°. 6′. 50″, 4 A.	− 0″, 010. F. 11. 0, 000. M. 11. + 0, 318. MK. 4. + 0, 059. P.	1792. 96. 1803.	27
13. 9. 9, 77 A.	− 0, 051. F. 15. + 0, 185. C. 0, 000. M. 12. + 0, 206. MK. 3. − 0, 193. P.	1792. 96. 1803.	38
23. 49. 1, 5 B.	− 0, 000. F. * − 0, 144. P.	1792. 1803.	9
39. 37. 26, 5 B.	+ 0, 103. F. 6. − 0, 159. R. 3. − 0, 042. C. + 0, 080. P.	1791. 1803.	18
31. 33. 9, 0 B.	+ 0, 185. F. 1. − 0, 330. P.	1793. 1803.	8
4. 0. 24, 6 A.	+ 0, 109. F. * − 0, 427. P.	1792. 1803.	8
3. 32. 22, 2 A.	+ 0, 091. F. * − 0, 139. P.	1792. 1803.	9
48. 43. 33, 6 B.	− 0, 007. F. 1.	1797. 1803.	15
35. 47. 42, 9 B.	+ 0, 064. F. 1. + 0, 040. P.	1793. 1803.	10
10. 38. 1, 3 B.	− 0, 108. R. 1. + 0, 132. C. − 0, 340. P.	1792. 93. 1803.	12
48. 17. 7, 5 B.	+ 0, 010. F. 2. + 0, 021. P.	1791. 97. 1803.	28
13. 59. 40, 2 B.	− 0, 093. C. − 0, 209. P.	1792. 1803.	9

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
ϑ Cefeo.	306°. 32'.54", 5	Æ. incerta in F.	1793. 96. 1803.	10
α Delfino.	307. 35. 7, 8	+ 0, 075. C.	1792. 1803.	8
δ Delfino	308. 31. 43, 9	+ 0, 060. C. + 0, 160. P.	1792. 1803.	10
Deneb	308	. . . .	. . . .	. . .
ε Cigno	309. 31. 42, 2	+ 1, 100. F. + 0, 532. R. + 0, 739. C.	1793. 96. 1803.	17
56. Cigno	310. 44. 38, 7	+ 0, 723. F.	1797. 1803.	7
57. Cigno	311. 32. 34, 8	+ 0, 600. F.	1793. 1803.	7
ν Cigno.	312. 25. 44, 5	+ 0, 609. F.	1798. 99. 1803.	22
60. Cigno	313. 33. 3, 0	+ 0, 627. F.	1793. 1801. 1803.	12
ξ Cigno.	314. 24. 52, 5	+ 0, 273. F.	1793. 1803.	13
ν Aquario.	314. 40. 10, 5	− 0, 087. M. 8 − 0, 370. P.	1792. 96. 1803.	26
f Cigno.	314. 55. 45, 8	+ 0, 600. F.	1793. 1803.	8
3. Pesce Australe.	315. 20. 58, 0	Æ. erronea in F.	1792. 1803.	11

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
62°. 19′. 30″, 1 B.	− 0″, 261. F. 2. + 0, 151. P.	1793. 1803.	19
15. 12. 58, 3 B.	− 0, 031. C. − 0, 194. P.	1792. 1803.	8
14. 22. 0, 3 B.	+ 0, 064. C. + 0, 025. P.	1792. 1803.	11
44. 34. 21, 65 B.	+ 0, 048. F. 2. + 0, 102. C. + 0, 060. M. 14. + 0, 136. MK. 14. + 0, 113. P.	1791. 1792. 1793. 1803.	40
33. 13. 46, 2 B.	+ 0, 543. R. 1. + 0, 394. C. + 0, 390. P.	1793. 1803.	8
43. 18. 47, 4 B.	+ 0, 172. F. 1. + 0, 046. P.	1791. 97. 1803.	18
43. 38. 11, 9 B.	− 0, 044. F. 1. + 0, 040. P.	1793. 1803.	8
40. 24. 15, 3 B.	0, 000. F. 3.	1799. 1803.	9
45. 22. 34, 7 B.	+ 0, 125. F. 1. − 0, 040. P.	1793. 1803.	12
43. 8. 10, 1 B.	− 0, 067. F. 2. + 0, 070. P.	1793. 1803.	12
12. 10. 16, 3 A.	+ 0, 009. M. 9. − 0, 127. P.	1792. 1803.	9
46. 50. 58, 3 B.	− 0, 052. F. 1. − 0, 370. P.	1793. 1803.	11
28. 25. 29, 7 A.	+ 0, 066. F. 1. − 0, 391. P.	1792. 1803.	11

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
α Cavalletto	316°.27'.16",8	+ 0",378. C.	1796. 1803.	17
77 Dragone	317. 18. 4, 0	+ 0, 045. F.	1793. 1803.	7
α Cefeo.	318. 26. 49, 6	+ 0, 513. C. + 0, 472. P.	1796. 1802. 803.	32
886. Mayer	319. 41. 2, 8	− 0, 144. M. 5	1796. 1803.	12
887. Mayer	319. 55. 23, 1	− 0, 198. M. 2 − 0, 210. P.	1796. 1800. 1803.	16
888. Mayer	320. 2. 31, 5	− 0, 104. M. 1	1796. 1803.	7
β Aquario	320. 15. 12, 6	+ 0, 123. F. − 0, 021. R. − 0, 143. C. − 0, 120. M. 6	1793. 96. 99. 1803.	15
G Cigno	320. 31. 5, 0	+ 0, 459. F.	1793. 1803.	12
890. Mayer	320. 38. 54, 0	− 0, 143. M. 1	1796. 1803.	9
γ Capricorno . . .	322. 14. 44, 1	− 0, 171. F. + 0, 287. R. + 0, 206. C. − 0, 053. M. 5	1792. 1803.	9
κ Capricorno. . . .	322. 51. 55, 8	− 0, 087. M. 4	1792. 1803.	8
ε Pegaso	323. 35. 19, 3	+ 0, 465. F. + 0, 100. R. + 0, 323. C. − 0, 300. P.	1796. 1803.	24

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
4°. 25'. 47", 5 B.	− 0", 059. C. − 0, 140. P.	1791. 1792. 1796. 1803.	14
77. 18. 44, 0 B.	+ 0, 274. F. * + 0, 130. P.	1793. 1803.	10
61. 44. 29, 6 B.	− 0, 212. F. 2. + 0, 021. C. + 0, 052. P.	1792. 93. 1803.	20
20. 0. 41, 7 A.	− 0, 113. M. 5.	1796. 1803.	13
15. 9. 27, 6 A.	− 0, 051. M. 2.	1796. 1800. 803.	17
20. 6. 27, 1 A.	− 0, 202. M. 1.	1796. 1803.	12
6. 26. 32, 1 A.	+ 0, 095. F. 15. − 0, 106. R. 2. + 0, 060. C. − 0, 011. M. 6. − 0, 350. P.	1792. 1793. 1799. 1803.	22
45. 39. 51, 6 B.	− 0, 054. F. 1 + 0, 180. P.	1793. 1803.	12
17. 4. 19, 7 A.	− 0, 353. M. 1.	1796. 1803.	12
17. 33. 26, 3 A.	+ 0, 102. F. 5. + 0, 064. R. 1. + 0, 100. C. − 0, 089. M. 5. − 0, 150. P.	1792. 1803.	12
19. 46. 9, 6 A.	− 0, 017. M. 4. − 0, 164. P.	1792. 1803.	11
8. 57. 55, 7 B.	+ 0, 168. F. 12. − 0, 255. R. 1. + 0, 026. C. − 0, 570. P.	1792. 96. 1803.	18

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.R.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
G Pegaso	323°.45'. 31", 7	+ 0",537. F.	1793. 1803.	7
δ Capricorno. . . .	323. 59. 40, 6	+ 0, 202. R. + 0, 173. C. 0, 000. M. 3	1793. 1803.	7
14. Pegaso.	325. 14. 58, 0	− 0, 295. F.	1792. 1803.	10
18. Pegaso.	327. 31. 58, 0	− 0, 034. F.	1792. 1801. 1803.	14
ο Aquario	328. 14. 15, 2	− 0, 291. M. 4	1793. 1803.	6
21. Pegaso.	328. 22. 25, 0	+ 0, 582. F.	1792. 1803.	6
α Aquario	328	. . . .	. . . .	. . .
ι Pegaso	329. 25. 31, 5	+ 0, 812. F. + 0, 53 :. P.	1792. 93. 1803.	12
c Aquario	329. 58. 38, 9	− 0, 167. F. − 0, 200. M. 3	1793. 1803.	10
ϑ Pegaso	330. 1. 30, 5	+ 0, 782. F. + 0, 66 :. P.	1792. 93. 1803.	15
ϑ Aquario	331. 33. 54, 0	− 0, 136. M. 2 − 0, 180. P.	1793. 1803.	9
γ Aquario	332. 49. 41, 0	+ 0, 103. F. + 0, 038. C. − 0, 174. M. 2 − 0, 157. P.	1796. 1803.	32

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
16°. 26′. 23″, 2 B.	+ 0″, 112. F. 1. − 0, 320. P.	1793. 1803.	10
17. 1. 35, 3 A.	− 0, 308. R. 1. − 0, 175. C. − 0, 343. M. 4. − 0, 360. P.	1793. 1803.	12
29. 14. 57, 4 B.	+ 0, 173. F. * − 0, 264. P.	1792. 1803.	10
5. 45. 57, 8 B.	+ 0, 161. F. * − 0, 408. P.	1792. 1803.	13
3. 6. 50, 5 A.	− 0, 032. M. 3. − 0, 127. P.	1792. 1803.	11
10. 25. 38, 9 B.	+ 0, 445. F. *. − 0, 355. P.	1792. 1803.	9
1. 17. 4, 76 A.	+ 0, 237. F. 12. 0, 000. R. 2. + 0, 049. C. + 0, 042. M. 3. + 0, 118. MK. 3. − 0, 180. P.	1793. 96. 99. 1800. 801. 803.	60
24. 22. 29, 5 B.	+ 0, 118. F. 4. + 0, 120. P.	1792. 93. 1803.	18
12. 32. 28, 7 A.	− 0, 176. F. 1. − 0, 036. M. 4. − 0, 410. P.	1793. 1803.	12
5. 13. 13, 0 B.	+ 0, 195. F. 4. − 0, 225. P.	1792. 93. 1803.	17
8. 46. 21, 9 A.	− 0, 056. M. 2. − 0, 270. P.	1793. 1803.	11
2. 23. 18, 0 A.	+ 0, 281. F. 13. + 0, 110. C. + 0, 102. M. 2. − 0, 082. P.	1792. 1803.	11

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
923. Mayer	333°.33′.57″, 7	− 0″,130. M. 1 − 0, 150. P.	1796. 1803.	10
ϖ Aquario	333. 45. 47, 0	− 0, 029. F.	1793. 1803.	7
34. Pegaso.	334. 6. 28, 5	+ 0, 641. F. + 0, 42 :. P.	1793. 1803.	14
ζ Aquario	334. 37. 49, 0	− 0, 143. M. 2	1796. 1803.	20
σ Aquario	335. 0. 39, 9	− 0, 141. M. 2	1794. 1803.	6
38. Pegaso.	335. 13. 20, 0	+ 0, 793. F. + 0, 300. P.	1794. 1803.	12
39. Pegaso.	335. 43. 54, 5	+ 0, 564. F. + 0, 400. P.	1792. 1803.	8
ϰ Aquario	336. 16. 0, 0	− 0, 245. M. 2 − 0, 135. P.	1793. 1802. 803.	15
κ Aquario	336. 50. 45, 0	− 0, 028. F. − 0, 263. M. 2	1792. 97. 1803.	11
930. Mayer	337. 23. 25, 0	− 0, 060. M. 1	1796. 1803.	8
ζ Pegaso	337. 52. 14, 6	+ 0, 691. F. + 0, 140. R. + 0, 440. C.	1793. 1802. 1803.	18
η Pegaso	338. 24. 32, 2	+ 0, 218. C.	1796. 1803.	16
τ 1. Aquario. . . .	339. 16. 2, 2	− 0, 467. F. − 0, 102. M. 3	1793. 1800. 1802. 1803.	20

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
2°. 11'. 45", 2 A.	+ 0", 051. M. 1.	1796. 1803.	14
0. 22. 6, 8 B.	+ 0, 159. F. 11. − 0, 080. P.	1793. 1803.	11
3. 22. 46, 8 B.	+ 0, 226. F. 2. − 0, 299. P.	1793. 1803.	12
1. 2. 16, 2 A.	− 0, 057. M. 2. − 0, 027. P.	1792. 1803.	10
11. 41. 45, 1 A.	− 0, 074. M. 3. − 0, 267. P.	1794. 1803.	10
31. 33. 13, 4 B.	+ 0, 156. F. 1. − 0, 111. P.	1794. 1803.	9
19. 12. 18, 0 B.	− 0, 031. F. 1. − 0, 171. P.	1792. 1803.	8
1. 8. 32, 2 A.	− 0, 027. M. 2. + 0, 087. P.	1793. 1803.	11
5. 15. 14, 3 A.	+ 0, 113. F. 11. Decl. erron. M. 2. − 0, 164. P.	1792. 94. 1803.	15
10. 23. 55, 7 A.	− 0, 083. M. 1.	1796. 1803.	10
9. 47. 33, 6 B.	+ 0, 159. F. 4. − 0, 118. R. 2. 0, 000. C. + 0, 040. P.	1793. 1803.	12
29. 10. 48, 1 B.	+ 0, 055. C. + 0, 109. P.	1792. 1803.	11
15. 6. 21, 5 A.	+ 0, 025. F. 2. Decl. erron. M. 3. − 0, 210. P.	1793. 1800. 803.	17

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
τ 2. Aquario. . . .	339°. 44′.44″, 6	− 0″,341. F. − 0, 137. M. 4 − 0, 270. P.	1792. 1802. 803.	11
λ Aquario	340. 32. 27, 3	− 0, 238. C. − 0, 238. M. 5	1792. 1803.	15
δ Aquario	341. 0. 11, 0	− 0, 181. R. − 0, 039. C. − 0, 261. M. 5	1792. 1793. 1796. 1803.	18
Fomalhaut . . .	341	. . . .	. . . .	. . .
1846. C. A.	342. 9. 11, 5	− 0, 480. C.	1792. 1802. 803.	12
943. Mayer	342. 28. 2, 2	− 0, 148. M. 2	1796. 1803.	16
Markab	343	. . . .	. . . .	. . .
954. Mayer	345. 4. 18, 0	Æ. dubbia in M. 1	1796. 1803.	28
φ Aquario	345. 59. 16, 2	+ 0, 066. F. − 0, 073. C. − 0, 202. M. 7 − 0, 336. P.	1792. 1803.	10
61. Pegaso.	346. 30. 15, 0	+ 0, 591. F. + 0, 100. P.	1794. 1803.	5

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
14°. 38′. 35″, 3 A.	− 0″, 119. F. 4. − 0, 081. M. 4. − 0, 527. P.	1792. 1803.	12
8. 38. 21, 0 A.	+ 0, 074. C. + 0, 023. M. 5. + 0, 042. P.	1792. 1803.	12
16. 52. 46, 1 A.	− 0, 021. R. 1. + 0, 089. C. − 0, 032. M. 4. − 0, 145. P.	1792. 1793. 1796. 1803.	21
30. 40. 39, 34 A.	− 0, 131. F. 4. − 0, 415. R. 3. − 0, 111. C. − 0, 210. M. 6. + 0, 006. MK. 8. − 0, 179. P.	1791. 92. 96. 1799. 1801. 1803.	68
30. 31. 46, 0 A.	+ 0, 120. C.	1792. 1803.	7
9. 56. 50, 6 A.	+ 0, 036. M. 2.	1796. 1803.	16
14. 7. 58, 60 B.	+ 0, 263. F. 16. + 0, 032. R. 2. + 0, 007. C. − 0, 010. M. 5. + 0, 102. MK. 3. + 0, 016. P.	1791. 93. 96. 1801. 1803.	44
7. 2. 32, 4 A.	+ 0, 013. M. 1.	1796. 1803.	12
7. 7. 27, 9 A.	− 0, 148. F. 7. − 0, 143. C. − 0, 271. M. 7. − 0, 400. P.	1791. 1803.	12
27. 9. 37, 0 B.	+ 0, 221. F. 1. − 0, 433. P.	1794. 1803.	7

Movimenti proprj colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
γ Pesci	346°.41′.51″, 0	+ 1″,064. F. + 0, 755. R. + 0, 483. M. 4 + 1, 00= P.	1798. 1803.	8
63. Pegaso	347. 45. 40, 6	+ 0, 550. F. + 0, 60= P.	1794. 1803.	6
B. 1. Aquario. . .	348. 6. 36, 0	− 0, 500. F. − 0, 30= P.	1794. 1803.	6
67. Pegaso.	348. 46. 5, 8	+ 0, 635. F.	1795. 1800. 801. 1802. 1803.	18
B. 2. Aquario. . .	348. 52. 41, 0	− 0, 398. F.	1792. 1803.	7
69. Pegaso.	349. 26. 14, 3	+ 0, 464. F. + 0, 70= P.	1795. 1803.	6
ϑ Pesci	349. 27. 14, 6	− 0, 337. M. 5 − 0, 336. P.	1792. 1802. 803.	10
971. Mayer	350. 17. 45, 0	− 0, 068. M. 3	1797. 1803.	8
B. 3. Aquario. . .	350. 17. 47, 1	+ 0, 077. F.	1792. 1803.	7
14. Pesci.	350. 57. 54, 2	+ 0, 774. F. − 0, 190. M. 5 − 0, 40=. P.	1795. 97. 1803.	10
72. Pegaso.	351. 0. 43, 6	+ 0, 532. F. + 0, 46= P.	1796. 1803.	7
16. Pesci.	351. 32. 38, 2	− 0, 370. M. 3 − 0, 41= P.	1794. 95. 1803.	12
74. Pegaso.	351. 53. 3, 5	+ 1, 300. F. + 0, 67= P.	1796. 1802. 1803.	10

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
2°. 11′. 33″, 9 B.	+ 0″, 181. R. 2. + 0, 007. M. 5.	1798. 1803.	8
29. 19. 34, 2 B.	+ 0, 066. F. 1. − 0, 111. P.	1794. 1803.	8
21. 11. 21, 7 A.	+ 0, 103. F. 2. − 0, 560. P.	1794. 1803.	6
31. 17. 18, 5 B.	+ 0, 159. F. 1.	1795. 1803.	6
21. 44. 10, 1 A.	+ 0, 133. F. 2. − 0, 291. P.	1792. 1803.	9
24. 4. 14, 6 B.	+ 0, 144. F. 1. − 0, 30=. P.	1795. 1803.	9
5. 16. 56, 4 B.	− 0, 055. M. 5. − 0, 145. P.	1792. 1803.	9
5. 10. 40, 4 A.	− 0, 234. M. 3. − 0, 400. P.	1797. 1803.	9
22. 28. 15, 3 A.	0, 000. F. 1. − 0, 136. P.	1792. 1803.	9
2. 20. 58, 7 A.	− 0, 084. F. 3. − 0, 033. M. 5. − 0, 100. P.	1797. 1803.	10
30. 13. 22, 8 B.	+ 0, 105. F. 2.	1796. 1803.	9
0. 59. 42, 0 B.	+ 0, 091. M. 3.	1794. 95. 1803.	15
15. 43. 13, 8 B.	+ 0, 248. F. 1.	1796. 1803.	9

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
ω. 1. Aquario . . .	352°.20′. 53″, 0	− 0″,298. F.	1794. 1798. 1803.	9
υ Pesci	352. 24. 55, 8	+ 0, 429. F. + 0, 151. M. 7 + 0, 338. P.	1795. 1803.	6
λ Pesci	352. 57. 32, 0	+ 0, 019. F. − 0, 419. M. 7	1794. 98. 1803.	14
ω. 2. Aquario . . .	353. 4. 57, 5	+ 0, 341. F.	1796. 1801. 1802. 1803.	16
979. Mayer	353. 39. 3, 6	− 0, 266. M. 2	1796. 1803.	6
A. 4. Aquario. . .	353. 54. 3, 5	+ 0, 209. F.	1792. 1802. 803.	8
981. Mayer	354. 14. 15, 0	− 0, 372. M. 1	1796. 1802. 803.	12
20. Pesci.	354. 24. 46, 5	+ 0, 064. F.	1794. 1803.	10
21. Pesci.	354. 48. 13, 5	− 0, 247. M. 3	1794. 1803.	8
79. Pegaso.	354. 53. 16, 0	+ 0, 678. F.	1795. 1803.	6
22. Pesci.	355. 25. 49, 5	+ 0, 127. F.	1792. 1802. 803.	10
988. Mayer	356. 8. 3, 0	− 0, 330. M. 3 − 0, 407. P.	1796. 97. 1803.	10
26. Pesci.	356. 13. 27, 5	+ 0, 033. M. 3	1792. 1803.	6
ω Pesci	357. 15. 37, 6	+ 0, 349. F. − 0, 075. M. 6 0, 000. P.	1795. 97. 98. 1802. 1803.	26

Di Stelle
e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
15°. 19'. 32", 1 A.	− 0", 223. F. 1. − 0, 300. P.	1794. 1803.	9
4. 32. 37, 3 B.	− 0, 337. F. 10. − 0, 532. M. 6. − 0, 525. P.	1795. 1803.	8
0. 40. 50, 5 B.	+ 0, 102. F. 1. − 0, 243. M. 6.	1794. 1803.	10
15. 38. 55, 0 A.	− 0, 312. F. 1. − 0, 340. P.	1796. 1801. 803.	15
6. 5. 1, 7 B.	− 0, 037. M. 2.	1796. * 1803.	9
19. 47. 22, 3 A.	− 0, 138. F. 1. − 0, 427. P.	1792. 1803.	9
13. 0. 57, 0 A.	− 0, 083. M. 1.	1796. 1803.	10
3. 52. 18, 0 A.	+ 0, 127. F. 1.	1794. * 1803.	10
0. 1. 59, 1 A.	− 0, 038. M. 3.	1794. 1803.	9
27. 43. 49, 5 B.	+ 0, 112. F. 1.	1795. * 1803.	9
1. 49. 10, 8 B.	+ 0, 078. F. 1. − 0, 191. P.	1792. 1803.	7
1. 0. 8, 0 A.	+ 0, 004. M. 2. + 0, 100. P.	1796. 97. 1803.	14
5. 57. 36, 4 B.	− 0, 065. M. 2. + 0, 037. P.	1792. 1803.	9
5. 45. 23, 8 B.	− 0, 025. F. 2. − 0, 121. M. 4. − 0, 170. P.	1795. * 1803.	8

Movimenti proprj
colle loro Ascensioni Rette

NOME DELLA STELLA.	Æ.ta MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
30. Pesci	357°.55′.22″, 5	– 0″,217. M. 4	1794. 1803.	7
33. Pesci	358. 46. 19, 7	– 0, 264. M. 6	1794. 1803.	9
α Andromeda . . .	359	. . . .	. . . .	. . .

e Declinazioni medie pel 1800.

DECLINAZIONE MEDIA PEL 1800.	MOVIMENTI PROPRJ.	ANNI DELLE OSSERVAZIONI.	N. delle Osservaz.
7°. 7'. 30", 6 A.	– 0", 123. M. 4.	1793. 1803.	8
6. 49. 33, 0 A.	+ 0, 032. M. 4.	1794. * 1803.	9
27. .59. 9, 82 B.	– 0, 053. F. 6. – 0, 308. R. 2. – 0, 120. C. – 0, 184. M. 4. – 0, 052. MK. 5. – 0, 260. P.	1792. 97. 99. 1801. 1803.	37

NOTE.

Si aggiungono le due seguenti stelle, le quali meritano di esser prese in considerazione dagli Astronomi, atteso il movimento assai forte, che sembrano avere in ÆR^{ta}. Di esse nel corso del 1803. non ne furono osservate che le sole ÆR^{te}., e queste per sodisfare alle difficoltà, che mi furono proposte dall'Illustre Presidente Cagnoli su varie differenze de' nostri Cataloghi. A Lui quindi io debbo in parte di avere riconosciuti si fatti movimenti, siccome di avere scoperti alcuni errori di calcolo nel mio catalogo.

	ÆR^{ta}. pel 1800.	Movimenti.	Anni delle Osser.	N°. delle Osservaz.	Declin.	
24. η Cassiopea. . .	9°.16'.24",0	+1,664. H. +1,991. F. +1,923. La L.2 +1,883. P.	1797. 1801. 1803.	10	56°.45'B	Le osservazioni del Sig. Cagnoli sembrano fatte nel 1788.
Di Cefeo 43. Evel.	10.57.12,0	+3,294. H. +5,070. La L.2 +3,970. P.	1798. 1800. 803.	12	85.12.B	Il Sig. Cagnoli dà 38" di più.

Algenib . . . . . Con le correzioni, delle quali si è ragionato, cioè di ± 0", 133, per Flamstedio, e ± 0", 091, per Maskelyne si avrebbe pel primo + 0, 145, e pel secondo − 0, 033, valori che si accordano assai meglio cogli altri. Lo stesso si osserva in tutte le stelle di questi Astronomi, all' eccezione di ben poche.

30. Balena. . . . Le due osservazioni di Flamstedio considerate sono quelle del 1693; le altre due del 1691, e 1699, perchè molto discordanti, si sono tralasciate.

105. Pesci . . . . L'osservazione del 1692 di Flamstedio si è ommessa per la ragione di sopra.

7 Balena. . . . . Non si è posto il movimento in declinazione con Evelio, perchè trop-

po discorde dagli altri; e per altro su le posizioni di questo Astronomo vi possono benissimo essere 3′ circa di errore.

4. Ariete. . . . . Non si è considerata l'osservazione del 1696 di Flamstedio.

112. Pesci . . . . Delle molte osservazioni di Flamstedio non si son considerate quella del 1689 che si allontana di 1′. 30″, e quella del 1698 che differisce di 1′ circa dalle altre.

63. Balena. . . . Le osservazioni di Flamstedio sono dei 21. e 25. Novembre 1698, la prima delle quali trovandosi notata dubbia, non fu calcolata che la seconda solamente. Intanto però quella dei 25. è erronea, e sembra giusta quella dei 21, dalla quale si cava + 0″, 029, per mov. in Æ^{ta}. Le distanze son d'accordo.

ρ. 1. Ariete . . . Le due distanze da Flamstedio osservate agli 11. e 13. Dicembre 1690. differiscono tra loro di 20″, e se n'è preso il medio. Delle altre due dei 25. e 27. Ottobre 1695. si è ommessa la seconda che discorda dalla prima di − 30″.

ε Ariete . . . . . Le due distanze di Flamstedio differiscono di 20″, e se n'è preso il medio.

D. Eridano . . . La Lande ha osservato questa stella negli anni 1796. 97. 99. Le due prime osservazioni danno il movimento segnato per la declinazione. Quella però del 99. dà − 5″, 400, ma essa è vicina: comparando tra loro le due osservazioni del 1796. e 99. si ha per mov. − 3″, 567. Le due osservazioni di Flamstedio non differiscono che di 10″ tra di loro.

χ Leone . . . . . Non si è tenuto conto delle due osservazioni di Flamstedio del 1692. 96.

ϖ Vergine . . . . Le due osservazioni di Flamstedio del 1696. differiscono di 35″ dalle altre, e perciò non si son considerate.

o Vergine . . . . Lo stesso della precedente; la differenza con le altre è di 22″ circa

η Vergine . . . . Tre altre osservazioni di Flamstedio del 1695. danno per mov. in decl. + 0″, 368.

ϑ Vergine . . . . Le due osservazioni di Flamstedio del 1693. e 1701. danno per mov. in decl. + 0″, 059, e le due del 1708. 1709. danno + 0″, 500. si è posto il medio.

96. Vergine. . . Le due osservazioni di Flamstedio sono del 1709. 1718. e differiscono di 7″, ma questa differenza è in direzione contraria a quella del movimento cavato.

υ. 1. Libra . . . . Vi sono 10. osservazioni in Flamstedio discordi tra loro: si è preso il medio toltene due

υ. 2. Libra. . . . Si sono ommesse due osservazioni di Flamstedio che danno 28″, più delle tre altre.

Gemma . . . . . . Da tre altre osservazioni di Flamstedio si ha per movimento in decl. − 0″, 285.

11. Scorpione. . Li movimenti che danno le tre osservazioni di Flamstedio sono − 0″,

142. + 0, 134. + 0, 014.

μ. 1. SAGITTARIO. Le posizioni di questa stella, e di più altre del Sagittario sembrano alquanto inesatte in La Caille. Le ÆR^{te}. sono generalmente un poco minori, e le declinazioni un poco maggiori di quelle degli altri Astronomi.

28. SAGITTARIO. . L'osservazione di Flamstedio del 1699. dà il movimento segnato. Un' altra del 1709. dà + 0″, 244.

29. SAGITTARIO. . Non si è considerata l' osservazione di Flamstedio del 1699, che discorda di 20″ dalle altre.

χ. AQUILA . . . . Le due osservazioni di Flamstedio differiscono di 20″.

DENEB. . . . . . . L'osservazione di Flamstedio del 1690. dà per mov. in decl. − 0″, 173.

κ AQUARIO . . . . Da tre osservazioni di Flamstedio si ha per mov. in decl. + 0″, 359, da altre quattro + 0″, 100, e da altre quattro − 0″, 118.

τ. 2. AQUARIO . . Le due osservazioni di Flamstedio del 1706 si allontanano dalle altre di + 50″ circa.

B. 1. AQUARIO. . Le due osservazioni di Flamstedio differiscono tra loro di 30″ circa.

B. 2. AQUARIO. . La medesima differenza tra le due osservazioni di questa stella.

DELLA QUADRATURA

Di certe superficie dotate di special curvatura, e della cubatura de' solidi chiusi tra le medesime

Del Sig. Canonico Girolamo Saladini

Presentata il 26. Giugno 1804.

Meditando sulla maniera, parto del sublime ingegno del gran Cartesio, di riferire ciascun punto d'una linea qualunque segnata in superficie piana ad una linea retta arbitraria condotta nel piano medesimo, che chiamasi comunemente linea dell' ascisse, in cui vien fissato un punto, che si vuole come origine delle medesime; mi si risvegliò l'idea di trasportare lo stesso metodo alle linee, che cangiano continuamente piano, e che sogliono chiamarsi di doppia curvatura. Se abbiasi pertanto una curva di doppia curvatura, io fisso nello spazio una retta arbitrariamente, che sarà la nostra linea dell' ascisse, le quali avranno in essa il suo principio, o sia vertice, che vi colloco similmente ad arbitrio; da ciascun punto della curva conduco alla linea dell'ascisse una retta, che formi con questa un angolo costante, che in grazia della semplicità supporremo retto; ciascuna delle rette saranno le nostre ordinate; e le porzioni della linea dell'ascisse intercette tra 'l vertice e l'incontro dell'ordinate colla linea dell' ascisse saranno l' ascisse stesse, e con ciò nascerà una superficie curva in cui giacciono tutte l'or-

dinate. Il mio scopo è di ritrovare le formole, che conducono alla compianazione di queste superficie curve, e alla cubatura dei Solidi racchiusi dalle medesime. Non essendo a mia cognizione, che per altro non può dar regola, chi abbia diretto le sue mire alla considerazion generale delle curve di doppia curvatura sotto quest' aspetto, (*) mi son invogliato d'inoltrarmi in sì sublimi meditazioni.

L'argomento mi sembra convenire a spiriti amanti di pascersi con luminosissime ed eterne verità superiori a qualunque più fiero attacco dello sfrenato Pirronismo, le quali forse sviluppate ed ordinate per condurle a portata dell' umano intendimento sempre debole, potranno giovare all' avanzamento delle Matematiche, vale a dire di quelle scienze, da cui non invano la società spera i maggiori lumi, onde indagar mezzi di sollevare le sue indigenze e cooperare per quanto può alla propria felicità.

Problema I.

Fig. 1. Si muova il punto A della retta AC sopra la stessa retta verso C, mentre la medesima AC è dotata di due altri moti, uno, che per chiarezza fingeremo orizzontale rotatorio intorno il punto C, e l'altro verticale, talmente che salendo AC per la verticale

(*) Un caso particolare del nostro problema fu trattato dal sig. Niccolò Fregola illustre matematico napoletano in una sua memoria inserita nel primo tomo degli atti della real Accademia di Napoli, in cui corregge un metodo fallace d' Architettura nel misurare la superficie delle volte fatte a spira.

CH, le sia costantemente normale. Il punto A descriverà necessariamente la linea ALMK; e la porzione della retta orizzontale CA compresa tra la verticale CH e la linea ALMK, descriverà una superficie curva KHCALMK. Si cerca la quadratura di questa superficie dipendentemente dai tre sopraindicati moti.

Risoluzione.

Sia ASVB un arco di circolo del raggio CA; e sia AEFD la projezione ortogonale della linea ALMK nel piano orizzontale CAB, che nasce calando da ciascun punto della linea stessa la normale al sottoposto piano orizzontale CAB. In qualsivoglia altezza CQ l'orizzontale QL rappresenti la posizione e la porzione della retta CA giunta che sia all' altezza stessa CQ; a QL sia infinitamente vicina PM, che rappresenti la posizione orizzontale, e la porzione della CA infinitamente vicina alla prima. Le projezioni ortogonali di queste due rette QL, PM nel piano CAB siano CE, CF; le quali saranno eguali alle stesse rette QL, PM, essendo le normali LE, MF calate sul piano ABC dai punti L, M eguali alle verticali CQ, PC. Dal punto F sia FX normale a CE. Nella retta PM si prenda ad arbitrio un punto M′, da cui condotta M′F′ normale al piano CAB incontrerà la retta CF in un punto F′; e condotto ancora un piano orizzontale per la retta QL, che sarà parallelo al piano CAB, verrà la retta M′F′ segata normalmente dallo stesso piano in N′. Da questo punto si tiri N′P′ perpendicolare a LQ in P′, la quale sarà parallela a FX;

imperciocchè concepita una normale condotta dal punto P′ al piano CAB, cadrà questa sopra la CE in T; e congiunta F′T, sarà questa parallela ed eguale ad N′P′ per essere N′F′, P′T eguali e parallele; ed inoltre per essere QL, CE parallele, sarà F′T normale a CE, come lo è N′P′ a QL, e perciò abbiamo F′T parallela a FX; dunque N′P′, FX son parallele. Si conduca ora M′P′: sarà questa normale a QL: imperciocchè il piano orizzontale QN′P′ è perpendicolare alla verticale M′N′; dunque il piano M′N′P′, che passa per la verticale M′N′, sarà normale al piano orizzontale QN′P′, e la loro comune intersecazione sarà N′P′. Ma perchè P′Q è normale per costruzione alla comune intersecazione N′P′, sarà essa normale ancora al piano M′N′P′, e perciò sarà normale ancora alla retta P′M′. (Tutte queste verità si dimostrano facilmente per mezzo del libro undecimo d'Euclide). Si tiri dal punto N′ nel piano N′QL la N′L′ parallela a FE, che seghi QL in L′; e da questo punto si cali la verticale L′E′, che incontri CS in E′, e si congiungano i punti F′E′.

Fig. 2. Premesse tutte queste cose, dico che la retta M′L′ giace tutta nella superficie curva PQLM. Sia dunque PQ normale al piano GQL, a cui sia inclinata LM, e sia PM parallela allo stesso piano, in cui dal punto Q conducasi QG parallela a PM; e dal punto M si cali MG normale a QG, la quale sarà perpendicolare ancora al piano GQL. Da qualunque punto M′ della retta PM si cali M′N normale a QG, la quale sarà similmente perpendicolare al piano GQL, in cui sia NL′ parallela alla retta GL, che congiunge i due dati punti G, L; si conduca M′L′; noi sosten-

ghiamo che questa giace tutta nella superficie curva P Q M L. Da qualunque punto O della retta P Q si conduca O R, la quale giunga fino a M L, e che sia nello stesso tempo parallela al piano G Q L: giacerà questa intieramente nella superficie P Q L M, come raccogliesi dalla generazione di questa superficie; nello stesso piano G Q L sia Q K parallela alla retta stessa O R: congiunta R K, riuscirà essa normale al piano Q G L; poichè altro non è che la comune intersecazione de' due piani O Q K R, M G L normali al medesimo piano Q G L. Quindi nascerà il rettangolo Q O R K normale al piano G Q L, la cui comune intersecazione col piano M′ L′ N è S X eguale a R K, la quale incontrerà la retta M′ L′ nel punto X: imperciocchè la retta, che si conducesse nel piano O Q K R dal punto S parallela a M′ N, la quale deve concorrere con M′ L′ in qualche punto, sta alla retta M′ N, come S L′ a L′ N; cioè come K L sta a L G, ovvero come K R a M G; ma abbiamo M G eguale a M′ N; dunque la retta anzidetta è eguale a K R; dunque sarà ancora eguale alla retta S X; per la qual cosa il punto X è comune alle due rette M′ L′, O R; ma O R giace tutta nella superficie curva P Q L M; dunque il punto X della retta M′ L si ritrova nella stessa superficie curva. Dimostrandosi la stessa cosa di tutti i punti della retta M L. dunque è vero che questa retta ritrovasi tutta per intiero nella superficie curva P Q M L. Ritorniamo ora alla prima figura, e si conduca h g infinitamente vicina alla retta M′ L′, determinandola nella stessa maniera come abbiamo fatto per determinare M′ L′; sarà il trapezio M′ L′ h g infinitesimo del second' ordine

l' elemento dello spazio curvo P Q L M infinitesimo del prim' ordine, e questo sarà l'elemento dello spazio curvo finito P C A L M. Poichè le rette P M, Q L son parallele alle rette C U, C S, che forman l'angolo infinitesimo U C S; e le porzioni M'h, L'g infinitesime delle rette P M, L Q son eguali alle projezioni rispettive ortogonali, le quali altro non sono che porzioni delle rette C U, C S infinitesime porzioni che non differiscono nè per riguardo alla posizione nè per riguardo alla quantità dall'essere veramente parallele ed eguali, se non se per differenze del second'ordine, come ho dimostrato nella Geometria sublime all'appendice del libro I.°: dunque M'h, L'g son parallele ed eguali. Per la qual cosa il trapezio M'h g L' non differisce dal parallelogrammo infinitesimo del second'ordine M'hg L'. Dunque questo parallelogrammo, o sia M'P' × L'g, è l' elemento dello spazio infinitesimo P Q L M. Dopo questa preparazione rivolgiamoci all' Algebra. Pongasi C A = 1, C E = y, F X = d x, C E' = z, F' T = N' P' = d u, C Q = r, P Q = M' N' = d r, M' P' = K; sarà M'h = L'g = d z; dunque il rettangolo M' P' in L'g = K d z, sarà l' espressione analitica dell' elemento dello spazio infinitesimo M' P' Q L', e $\int$ K d z sarà l' area infinitesima P Q M' L'. Se eseguita l' integrazione si sostituisca y alla z, otterremo l' area infinitesima M P Q L, e di nuovo integrando, sarà $\int\int$ K d z l'area indeterminata P C A M, nella quale dopo l' integrazione se si collochi l' altezza C H = r, si avrà in termini finiti l' espressione analitica della superficie curva K H C A L M K, che si ricerca.

Svolgiamo gradatamente la formola $\int\int$ K d z dian-

zi ritrovata. Il proposto problema non è determinato, se cognita non sia la relazione reciproca dei tre moti, dai quali viene agitato il punto A, cioè del rotatorio della retta CA orizzontale intorno il punto C, del verticale perpendicolare alla retta CH, e del punto stesso A lungo la retta AC. La relazione del moto del punto A sopra la retta AC, e del moto rotatorio della stessa AC intorno il punto C si contenga nell' equazione $\pi dy = dx$; la relazione poi dello stesso moto del punto A sopra AC al moto verticale della retta CA venga espressa dall'equazione $\phi dy = dr$, supposte π, ϕ funzioni di y. Essendo $y : z = dx : du$, perchè $CF : CF'$, cioè $y : z$ come $FX \cdot F'T$, cioè $dx : du$, sarà $du = \frac{z\,dx}{y}$; ma

$K = \sqrt{du^2 + dr^2}$, perchè abbiamo $M'P' =$

$\sqrt{\overline{N'P'}^2 + \overline{M'N'}^2}$; adunque $K = \sqrt{\frac{zz\,dx^2}{yy} + dr^2}$;

e mettendo invece di dr, ϕdy, e invece di dx, πdy,

si otterrà $K = \sqrt{zz\pi\pi \frac{dy^2}{yy} + \phi\phi\,dy^2} =$

$\frac{dy}{y}\sqrt{zz\pi\pi + yy\phi\phi}$. Pertanto sarà

$\int\int K\,dz = \int\int \frac{dy}{y}\,dz\sqrt{zz\pi\pi + yy\phi\phi} =$

$\int \frac{dy}{y} \int dz\sqrt{zz\pi\pi + yy\phi\phi}$; poichè mentre si suppone variare la z, si debbono supporre costanti π, ϕ, y, dy. Per integrare la formola $dz\sqrt{zz\pi\pi + yy\phi\phi}$

in cui fluisce la sola z, la scrivo nella maniera che segue; $\pi\, d z \sqrt{z z + \frac{y y \phi \phi}{\pi \pi}}$; in grazia della semplicità ponghiamo $\frac{y \phi}{\pi} = p$, con che la formola si cangia in $\pi\, d z \sqrt{z z + p p}$; la quale, trascurando il coefficiente π, è eguale a

$$\frac{2 z z d z + 2 p p d z}{2 \sqrt{z z + p p}} = \frac{z z d z + p p d z}{2 \sqrt{z z + p p}} + \frac{z z d z}{2 \sqrt{z z + p p}}$$

$$+ \frac{p p d z}{2 \sqrt{z z + p p}} \times \frac{\sqrt{z z + p p} + z}{\sqrt{z z + p p} + z} = \frac{d z}{2} \sqrt{z z + p p}$$

$$+ \frac{z z d z}{2 \sqrt{z z + p p}} + \frac{p p}{2} \, \frac{\left(d z + \frac{z d z}{\sqrt{z z + p p}} \right)}{\sqrt{z z + p p} + z}$$

Adunque integrando, avremo $\int d z \sqrt{z z + p p} =$

$$\frac{z \sqrt{z z + p p}}{2} + \frac{p p}{2} \text{Log.} \left(\sqrt{z z + p p} + z \right) + \frac{p p}{2} \text{Log. } C.$$

Per determinare la costante C si voglia la sommatoria eguale allo zero, quando la variabile z sia eguale allo zero; in tal caso ritrovasi $C = \frac{1}{p}$; e sostituendo alla p il suo valore $\frac{y \phi}{\pi}$, e collocato y in luogo di z, e restituito il coefficiente π, si otterrà $\int \pi\, d z \sqrt{z z + p p}$

$$= \frac{y y}{2} \sqrt{\pi \pi + \phi \phi} + \frac{y y \phi \phi}{2 \pi} \text{Log.} \frac{1}{\phi} \left(\sqrt{\pi \pi + \phi \phi} + \frac{\pi}{\phi} \right) ;$$

e finalmente $\int\int K dz = \int \frac{dy}{y} \int dz \sqrt{zz\pi\pi + yy\varphi\varphi}$

$= \int \frac{y dy}{2} \sqrt{\pi\pi + \varphi\varphi} + \int \frac{y.dy\varphi\varphi}{2\pi} \times \text{Log.} \frac{1}{\varphi} \sqrt{\pi\pi + \varphi\varphi} + \frac{\pi}{\varphi}$
$+ C \ldots$ (H).

Supponga nsi adesso in grazia della semplicità il moto rotatorio orizzontale, e il parallelo verticale della retta CA equabili; onde sia l' arco AS all' altezza CQ in ragion costante 1 : n; sarà $PQ = nUS$; ma abbiamo $US = \frac{dx}{y}$; dunque $PQ = dr = \frac{ndx}{y}$; ma è $dr = \varphi dy$, e $dx = ndy$; adunque $\varphi dy = \frac{n\pi dy}{y}$, e $\varphi = \frac{n\pi}{y}$; e sostituito il valore di φ nell'equazione (H), nasce l'equazione $\int\int K dz = \int \frac{\pi dy}{2} \sqrt{yy + nn} +$

$$\int \frac{\pi n^2 dy}{2y} \text{Log.} \frac{1}{n} (\sqrt{yy + nn} + y) + C \ldots \text{(K)}$$

Fig. 1. Esempio I°. Sia la curva AFD la spirale di Archimede, la cui equazione, riferendo la curva al centro, sappiamo essere $\frac{ydy}{dx} = b$: la b è la sunormale costante della nostra spirale. Otterremo $\frac{ydy}{b} = dx = \pi dy$; quindi $\pi = \frac{y}{b}$; ed eseguita la sostituzione di questo valore di π nell' equazione (K), nasce

$$\int \frac{ydy}{2b} \sqrt{yy + nn} + \int \frac{nndy}{2b} \text{Log.} \frac{\sqrt{yy + nn} + y}{n} + C$$

$$= \frac{(yy + nn)^{\frac{3}{2}}}{bb} + \frac{nn}{2b} \int dy \text{ Log:} \frac{\sqrt{yy + nn} + y}{n} + C =$$

$\int\int K dz$, che è appunto l' area da noi ricercata.

Esempio 2°. La curva AFD sia l' ellisse, il cui centro sia C, il semiasse maggiore CA sia $=a$; il minore CD $=b$; si concepisca condotto dal centro C il semidiametro conjugato al diametro CF, che sarà parallelo all' archetto infinitesimo FE, o sia alla tangente condotta dal punto F, e chiamisi questo semidiametro conjugato $=p$. Due proprietà notissime dell' ellisse sono le seguenti: $pp+yy=aa+bb$, e il parallelogrammo dei semidiametri conjugati p, CF nell' angolo, che loro corrisponde, è egnale ad ab. Sarà pertanto $p=$

$\sqrt{aa+bb-yy}$, ed $\dfrac{ab}{\sqrt{aa+bb-yy}}$ sarà la normale calata dal centro sopra la tangente FE; ma sta CF a questa perpendicolare come FE a FX; sarà

dunque analiticamente $y : \dfrac{ab}{\sqrt{aa+bb-yy}}$

$=\sqrt{dx^2+dy^2} : dx$ cioè $y\sqrt{aa+bb-yy} : ab=$

$\sqrt{dx^2+dy^2} : dx$, ed innalzando la proporzionalità alla

seconda potenza, si avrà $yy\times\overline{aa+bb-yy} : aabb=dx^2+$

$dy^2 : dx^2$: e dividendo si otterrà $\overline{aa+bb}\times yy-y^4-$

$aabb : aabb=dy^2 : dx^2$; onde nasce l'equazione dell' el-

lisse riferita al centro $dx=\dfrac{abdy}{\sqrt{\overline{aa+bb}\times yy-y^4-a^2b^2}}$

Suppongasi $ab=cc$, ed $aa+bb=mm$; nascerà l' equazione dell' ellisse riferita al centro $dx=$

$\frac{c\,c\,d\,y}{\sqrt{m\,m\,y\,y - y^4 - c^4}}$: ma abbiamo posto $d\,x = \pi\,d\,y$;

dunque sarà $\pi = \frac{c\,c}{\sqrt{m\,m\,y\,y - y^4 - c^4}}$; e sostituito questo valore nell' equazione (K), sarà l' espressione della superficie curva ricercata nella presente supposizione dell' ellisse $\int \frac{c\,c\,d\,y\,\sqrt{y\,y + n\,n}}{2\sqrt{m\,m\,y\,y - y^4 - c^4}} +$

$$\int \frac{n^2\,c^2\,d\,y}{2\,y\sqrt{m\,m\,y\,y - y^4 - c^4}} \text{ Log. } \frac{\sqrt{y\,y + n\,n} + y}{n} + C$$

Se sia $a = b$, onde l' ellisse si converta in circolo; per ottenere speditamente in questa ipotesi la superficie curva, di cui trattasi; si sostituisca nella di lei espressione $d\,x$ in luogo di $\frac{c\,c\,d\,y}{\sqrt{m\,m\,y\,y - y^4 - c^4}}$, e nascerà la formola $\int \frac{d\,x\sqrt{1 + n\,n}}{2} +$

$\int \frac{d\,x}{2}\,n\,n \text{ Log. } \frac{\sqrt{1 + n\,n} + 1}{n} + C$; perchè in questa ipotesi abbiamo $y = 1$ cioè costante; se facciasi ancora $n = 1$; se sia cioè la porzione CH, per cui s' innalza la retta AC, eguale alla periferia del circolo AS descritta nello stesso tempo dal punto A; sarà la nostra superficie curva $\frac{x}{2}\sqrt{2} + \frac{x}{2} \text{ Log. } \sqrt{2} + 1 + C$; e perchè dee essere questa superficie $= 0$ nell' ipotesi

in cui svanisce la x; dunque non si dee aggiungere costante alcuna, e perciò avremo l'espressione della nostra superficie curva indeterminata $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2}\,\text{Log.}\,\overline{\sqrt{2}+1}$.
Disegni p la periferia del circolo ASB: sarà l'area curva KHCAMK generata dall' intera rivoluzione del raggio CA intorno il punto C eguale a

$\frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{p}{2}\,\text{Log.}\,\overline{\sqrt{2}+1} = \frac{p}{1,41} + \frac{p}{2}\,\text{Log.}\,2,41$; ma abbiamo $p = 6,29$, e $\frac{p}{1,41} = 4,46$, e il logaritmo iperbolico Log. $2,41 = 0,879627$; dunque sarà l' area ricercata $= 7,22$ prossimamente.

Dalle cose sin qui esposte si ricava il seguente teorema. P ed U siano due funzioni di y, ed F disegni l'area d' una superficie curva del genere di cui trattiamo; dico che avremo $\int \frac{V^4 - 1}{4V^2} \times dP + \int dP\,\text{Log.}\,V = F$.

DIMOSTRAZIONE.

Si ponga $\frac{V^2-1}{2V} \times H = \phi$, $\frac{\overline{V^2-1}^{\,2}}{4V^2} \times H = \pi$; H si pone eguale $\frac{2dP}{ydy}$; nascerà $\frac{\phi}{\pi} = \frac{2V}{V^2-1}$; e perciò $\phi\,(V^2-1)$ $= 2\pi V$ o sia $\phi^2 V^2 - \phi\phi - 2\pi\phi V = 0$; quindi $\pi\pi -$ $2\pi\phi V + \phi^2 V^2 = \pi\pi + \phi\phi$, e $\sqrt{\pi\pi+\phi\phi} = -\pi + \phi V$; adunque $V = \frac{\sqrt{\pi\pi+\phi\phi}+\pi}{\phi}$. Inoltre essendo $\frac{V^2-1}{2V}H$ $= \phi$, sarà $\frac{2\phi V}{V^2-1} = H = \frac{2dP}{ydy}$; onde $\frac{\phi V y d y}{V^2-1} = d\ P =$

$\frac{\varphi^2}{2\pi} y\,d\,y$; e sostituendo avremo $d\,P\,\text{Log.}\,V =$

$\int \frac{\varphi\varphi}{2\pi} y\,d\,y\,\text{Log.}\,\frac{\sqrt{\varphi\varphi+\pi\pi}+\pi}{\varphi}$ Inoltre abbiamo

$\frac{V^4-1}{4\,V^2}H = \frac{V^2-1}{2\,V}H \times \frac{V^2+1}{2\,V}$; onde $\left(\frac{V^4-1}{4\,V^2}\,H\right)^2 = \frac{\overline{V^2-1}^{\,2}}{4\,V^2}H^2 \times$

$\frac{\overline{V^2+1}^{\,2}}{4\,V^2} = \frac{\overline{V^2-1}^{\,2}}{4\,V^2}\left(1+\frac{\overline{V^2-1}^{\,2}}{4\,V^2}\right)H^2 = \frac{\overline{V^2-1}^{\,2}}{4\,V^2}\,H^2 +$

$\left(\frac{\overline{V^2-1}^{\,2}}{4\,V^2}\right)^2 H^2 = \varphi\varphi+\pi\pi$. Dunque $\frac{V^4-1}{4\,V^2}\,H =$

$\sqrt{\varphi\varphi+\pi\pi}$; e finalmente $\int\frac{V^4-1}{4\,V^2}\,d\,P + \int d\,P\,\text{Log.}\,V =$

$\int\frac{y\,d\,y}{2}\sqrt{\varphi\varphi+\pi\pi} + \int\frac{\varphi\varphi}{2\pi}\,y\,d\,y\,\text{Log.}\,\frac{\sqrt{\varphi\varphi+\pi\pi}+\pi}{\varphi} = F,$

che è appunto l' espressione della superficie curva di cui trattiamo, data per y.

Dell' integrazione della formola $d\,P\,\text{Log.}\,V$ tratta l' Eulero nel calcolo integrale, tom. I°. cap. 4; e noi ancora nel Compendio di analisi, tom. II°. lib. 1. cap. 7. Quindi la compianazione delle nostre superficie curve è ridotta ai metodi cogniti.

Problema 2.

Fig. 3. Sia ADE′A′A una superficie curva descritta nel modo che abbiamo indicato nel problema antecedente; sia la superficie BCF′B′B curva eguale e simile alla prima e similmente posta, come lo è l'anzidetta superficie ADE′A′A; cioè sia la superficie se-

conda la stessissima superficie prima trasportata dall' altezza AA' nell' altezza BB'; se dalle due curve DE', CF' eguali, simili, e similmente poste si taglino parti eguali a piacimento DY, CR, i punti Y, R saranno punti analoghi; se si congiungano questi punti con rette, nasce la superficie curva F'E'DC. Questa superficie curva, e i due rettangoli F'E'AB', ABCD, e l'altre superficie ADE'A'A, BCF'B'B chiudono un Solido. Si cerca di ritrovare un cubo eguale a questo Solido.

Siano i punti Y, R delle curve DE', CF' corrispondenti all' ordinate XY, UR; le quali sono eguali e parallele; le cui projezioni ortogonali nella base ADE concorrono in una sola retta a cagione dello stesso moto angolare delle rette XY, VR; dunque VX sarà eguale a YR; ma VX eguaglia la retta BA, poichè AX, BU sono eguali; avvegnachè le rette XY, VR analoghe sono egualmente distanti dalle rette AD, BC, adunque qualsivoglia YR sarà eguale alla retta BA; quindi sarà costante.

Si prenda vr infinitamente vicina a VR nella superficie superiore; e xy sia la retta analoga a vr; saranno tali rette eguali e parallele; ed xy sarà infinitamente vicina ad XY. Avremo adunque un Solido infinitesimo chiuso da una parte da superficie infinitesime analoghe ed eguali VvrR, XxyY; la prima esiste nella superficie superiore, la seconda nell' inferiore; dall' altra parte il nostro Solido infinitesimo è terminato dai rettangoli VXYR, vxyr, e la superficie infinitesima RYyr, che non differisce dal parallelogrammo RYyr. Questo Solido infinitesimo è l' elemento di primo ordine del Solido, che dobbiamo cubare.

Si prenda in VR qualunque punto L', e si conduca L'M' nella superficie infinitesima vVrR, come nella prima figura, e sia h'G' infinitamente vicina alla medesima; siano inoltre nella superficie infinitesima inferiore XxyY condotte ML, hg parallele, ed eguali alle superiori; congiunti i punti M'M, h'h, L'L, GG'; nasce il Solido infinitesimo del secondo ordine; cioè nasce l' elemento infinitesimo di ordine secondo del Solido, che ci siamo proposti di cubare.

Noi eseguiamo ciò per mezzo dell' analisi nella maniera, che segue. Si ponga BA=a nella figura terza. (Si osservi la figura prima). Se si tagli dalla retta M'F' la MZ=a; e se si supponga compito il Solido M'L'ghMZ, sarà questo l' elemento di secondo ordine, di cui trattiamo presentemente; e se dal punto g si cali sopra il piano M'F'E'L' la normale, sarà quest' elemento di ordine secondo eguale al prodotto di questa perpendicolare nelle rette N'L ed MZ; imperciocchè la N'L' orizzontale è normale alla verticale M'F'. Perchè poi il piano M'F'E'L' è normale al piano D'CA' la comune sezione di questi piani F'E' eguale ad N'L', e parallela, sarà parallela ad FE; imperciocchè N'L' è parallela ad FE per costruzione; se sopra FE' prolungata si cali la perpendicolare dal punto C, sarà questa normale anche al piano M'F'E'L', e perciò sarà parallela alla perpendicolare condotta dal punto g sopra il piano stesso; ed essendo QL parallela a CE, l'angolo contenuto dalla perpendicolare condotta dal punto C sopra F'E' prolungata, e dalla retta CE', cioè contenuto dalle rette F'T, F'E' sarà eguale all' angolo contenuto dalla perpendicolare condotta dal punto g sopra il piano

$M'F'E'L'$, e dalla retta $L'g$. Questa perpendicolare pertanto sarà eguale $\frac{L'g \times F'T}{F'E'} = \frac{L'g \times F'T}{N'L'}$. Dunque il nostro elemento infinitesimo di second' ordine sarà $M'Z \times N'L' \times \frac{L'g \times F'T}{N'L'} = M'Z \times L'g \times F'T$; ma abbiamo posto $M'Z = a$, $L'g = dz$, $F'T = \frac{z\,dx}{y}$; dunque il nostro elemento sarà espresso per $\frac{a\,z\,dz\,dx}{y}$: ma dx, y sono costanti, mentre si suppone variabile z; dunque integrando, sarà l' elemento infinitesimo del prim' ordine (si osservi la figura 3ª:) $VvL'M'XxML = \frac{a\,dx}{y}\int z\,dz + C = \frac{a\,dx\,z^2}{2y}$. La costante si ritrova eguale a zero; e ponendo y invece di z, sarà l'elemento di prim' ordine $VvrRXxyY = \frac{a\,y\,dx}{2}$. Dunque sarà la cubatura del nostro Solido espressa per $\frac{a}{2}\int y\,dx$; ciò che mi era proposto di ritrovare.

Corollario 1.

Fig. 1. Poichè la $\int \frac{y\,dx}{2}$ esprime l' area della curva di projezione ortogonale nel piano ACB orizzontale, perciò la cubatura del nostro Solido è stata ridotta alla quadratura della curva di projezione.

Corollario 2.

Qualunque sia il moto verticale parallelo a se stesso, se ritengasi la curva stessa di projezione nel piano orizzontale, non si muta la quantità del Solido, poichè si ritrova costantemente $= \frac{a}{2}\int y\,dx$.

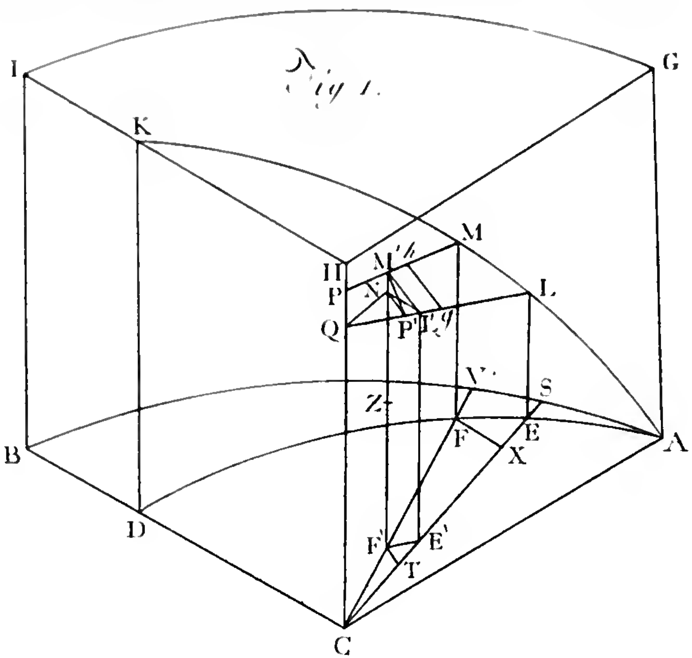


Fig 1.

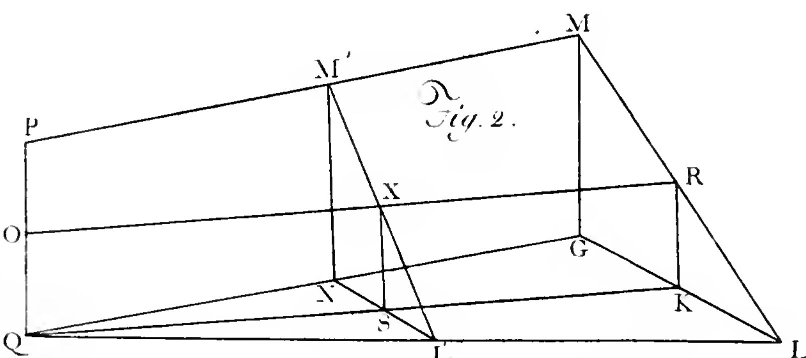


Fig. 2.

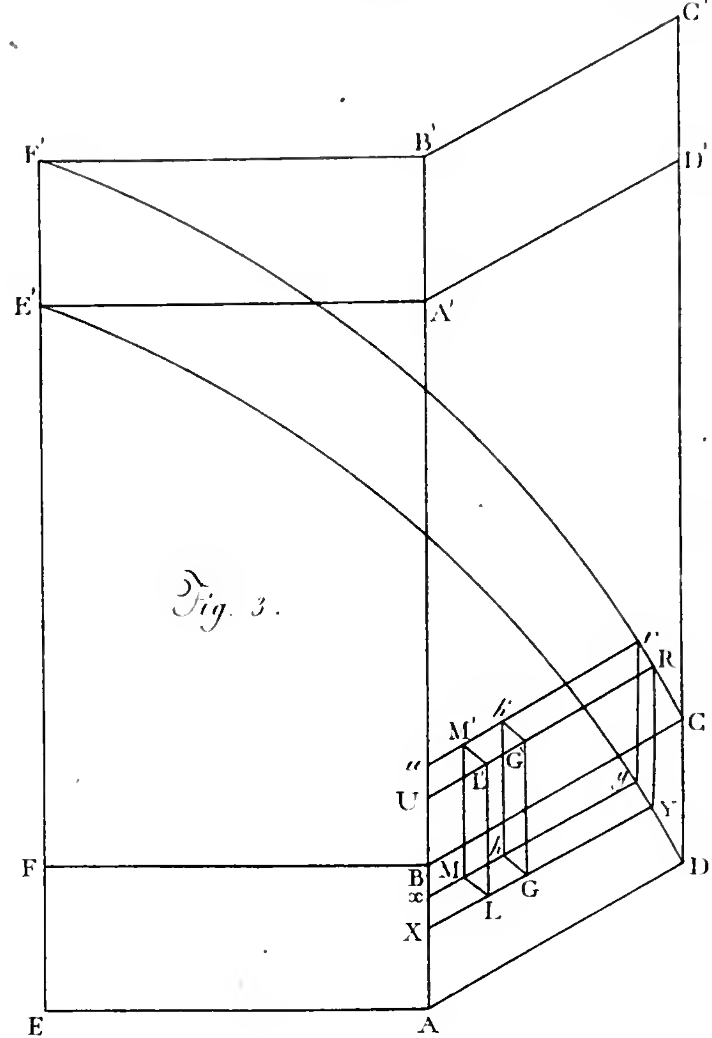


Fig. 3.

Corollario 3.

Se la curva di projezione nel piano orizzontale sia un circolo, il cui raggio sia $=r$, sarà $y=r$, e $dx=d\phi$; ϕ disegna l'arco della periferia di questo circolo; adunque il nostro Solido sarà $\frac{ar\pi}{2}$; e dopo una rivoluzione intiera, essendo ϕ uguale alla periferia intiera, che chiamo $=p$; sarà il Solido $=\frac{arp}{2}$, cioè eguale a un cilindro che ha per base il circolo dato, e per altezza la retta $=a$.

Questo Solido è sempre lo stesso, qualunque sia la legge del moto della retta CA, purchè sia costantemente perpendicolare alla retta CH.

Queste cose mi sembrano bastanti per l'intelligenza di ciò che ci eravamo proposti di trattare.

OSSERVAZIONI PRATICHE DI CHIRURGIA

Di Gio: Battista Palletta

Ricevute ai 30. Giugno 1804.

I.

Della cura del polipo uterino.

I mezzi che sono stati finora indicati da varj Autori per estirpare il polipo dell' utero, debbono riputarsi o insufficienti, o malagevoli a praticarsi; e la moltitudine stessa delle invenzioni di tal genere fa supporre che il successo non abbia corrisposto ai metodi già conosciuti ed a quelli che furono per qualche tempo in voga. In generale da tutti i Pratici è stato abbracciato il metodo dell' allacciatura per isradicare i polipi della matrice; e quindi è nata la copia degl' istrumenti, che si sono successivamente prodotti per praticarla colla maggiore sicurezza. Non manca però l' allacciatura di avere i suoi difetti. Imperocchè egli non è tanto facile l' applicarla bene, come molti Scrittori vorrebbono pure farci credere; e quantunque la legatura sia per avventura bene collocata, non tralascia di cagionare notabili patimenti alle donne. Lo stiramento, che sul principio induce all' utero ed ai lombi; la febbre; lo scolo del-

le materie saniose che apportano puzza ed escoriamento alla vagina, e soprattutto la molestia, che deve arrecare un ordigno qualunque lasciato in sito, sono altrettanti motivi, che possono e debbono determinare un chirurgo ad abbandonarla. Mi è parso che si scanserebbero tutti questi sintomi, se si passasse all'immediata recisione del polipo. Mi è nata la prima idea della possibilità dell' amputazione dal caso, che ora sono per esporre.

Una donna d'anni 47. di abito cachetico stata affetta da ulcere veneree fu trattata con i mercuriali. Dopo la guarigione le cadde tutto ad un tratto fuori del pudendo un volume di carne, di cui ella non s' era accorta da prima. Ella stette in riposo per molti giorni senza punto pensare ad alcun riparo, finchè la superficie del sarcoma prese un aspetto livido con febbre e decadimento notabile di forze. In questo stato io vidi per la prima volta l' inferma, ed essendo accompagnato da altri Chirurghi, pensavano questi che fosse una discesa dell'utero. Mancavano però i segni del prolasso, perchè non si scorgeva punto l'orifizio della matrice; la vagina non era rovesciata in fuori, come doveva esserlo, e col dito potevasi girare liberamente intorno al sarcoma fino ad una data altezza. Questo sarcoma uguagliava in grossezza la testa d' un bambino appena nato, e restava appresso a'due peduncoli d' una sostanza fitta e resistente, de' quali uno era più grosso dell' altro. Presi allora il partito di legarlo, il che riuscì facilmente col portafilo di Hunter. Non volli però stringere di troppo il laccio, a fine di non cagionare una irritazione violenta, che potesse propagarsi all'

utero ed alla vescica; per il che fu d' uopo di applicare in seguito due altre legature, le quali, non ostante la precauzione usata, riuscirono meno strette del bisogno a motivo della solidità e della grossezza del peduncolo. Tuttavia il sarcoma si mortificò in parte, ed indi scoppiò lasciando scorrere un' abbondante sierosità, dopo di che il di lui volume diminuì considerevolmente.

La donna intanto fu sorpresa da febbri irregolari, da meteorismo, da secesso liquido e copioso, col quale andava perdendo i polsi e le forze, e coll' aggiunta del singhiozzo finì di vivere otto giorni dopo che fu fatta la legatura. All'esame del cadavero intervennero fra molti altri il ch. sig. dot. Giuseppe Wenzel di Magonza, che allora trovavasi in Milano. Le viscere dell' addomine erano nello stato più perfetto di sanità. L'utero, benchè posto nella naturale situazione, parve nondimeno un po' più voluminoso di quello che suol essere comunemente. Tutte le altre parti attinenti all' utero ed alla vescica orinaria non avevano contratta alcuna apparenza morbosa. Si tagliò quindi la vagina per lo lungo, dalla cui parete posteriore, ed un poco a sinistra in vicinanza del collo dell'utero, si vide prendere origine il polipo. L' orifizio stesso dell'utero fu spinto in alto dalla mole del polipo, e maggiormente dal lato destro, senza che altronde si sia manifestato vizio nella di lui sostanza. La superficie del sarcoma non presentò alcun guasto o traccia di suppurazione; ed era col suo considerevole peduncolo radicato per modo che si durò fatica a reciderlo; ed il nocciuolo del polipo, come il peduncolo, si riscontrò in fatti durissimo. Ap-

pena il polipo fu reciso, che si resero cospicui gli orifizj di quattro canaletti sanguigni, tanto dalla parte del peduncolo, quanto da quella della vagina, fra i quali uno aveva la sembianza d'arteria. La vagina era stata dilatata in ragione soltanto del volume sarcomatoso, niente alterata nella sua tessitura, come neppure l' intestino retto aveva subito alcun cangiamento per la vicinanza del polipo.

Dalla vagina passammo alla ispezione dell' utero che nell' inciderlo lasciò scappare molte goccie di *pus*. Questo *pus* videsi scaturire in parte dal parenchima stesso dell' utero, ed in parte dal tessuto celluloso che accompagna i vasi spermatici e quelli della cervice dell' utero, senza che nella cavità di questo vi fosse alcun vestigio di purulenza. Poc' acqua contenevasi nella destra cavità del petto; e due tubercoletti suppurati si notarono nell' ultimo lobo del polmone corrispondente.

Dopo l' esposizione anatomica succennata segue naturalmente la ricerca di sapere quale dei due vizj ritrovatisi nel cadavero sia stato la cagione vera della morte. Il guasto osservatosi al polmone destro non era al certo di tanta forza da far perire l' ammalata in sì breve tempo. I tubercoli scoppiando nella cavità del petto, o apportano una immediata soffocazione, o una lenta morte col successivo spurgamento per la bocca. Non si poteva negare essersi infiammata la cellulare che circonda l'utero, e quella ch' entra nella formazione del suo corpo; e tale stato non ci lascia alcuna incertezza sulla cagione della morte. Vi sono già osservazioni di valenti Pratici che dopo l' allacciatura han veduto

soccombere le ammalate per una infiammazione dell'utero, e del peritoneo, che lo cuopre esteriormente, e qualche volta eziandio con ispandimento di linfa nell' addomine. Questo disastroso avvenimento ci porta a considerare se più salutare e meno perniciosa della legatura sarebbe per riuscire l' amputazione del polipo, e quali sarebbero i mezzi da impiegarsi per ovviare alle tristi conseguenze della medesima.

Gli accidenti sfavorevoli all' amputazione potrebbonsi ridurre alla infiammazione consecutiva ed alla emorragia. La prima, se pur accade, dovrebbe essere assai meno estesa e meno grave dopo l' incisione, di quando viene eccitata da uno stimolo permanente, com'è la legatura, stimolo che si propaga molto in alto fino alle appendici uterine. Una ferita semplice risultante dalla totale recisione non può che affettare l'area alla quale stava aderente il polipo.

Il sintomo più temuto dagli operatori è la perdita di sangue dai vasi recisi, che talvolta sono molto dilatati. Ed in vero questa potrebbe intimorire qualunque Professore e farlo desistere dall'impresa. Ma egli non abbandonerà sì tosto il progetto, se vorrà riflettere che quei medesimi presidj, che si mettono in opera sopra qualunque parte esteriore, si possono utilmente impiegare anche per l'emorragie uterine. Imperocchè o il polipo ha le sue attaccature fuori della cavità dell'utero, ed ognuno comprende che si può maestrevolmente riempire la vagina di taste molli, di pezzetti di tela fina, di spugna, o d' altro, onde formare una diga al sangue, ch'è pronto ad uscire; o le radici del polipo sono impiantate nel fondo dell' utero; e in tal caso ha luogo lo

stesso presidio. L' esperienza, come dirò in appresso, ha insegnato che l' orifizio ed il collo uterino sono in tal caso ampliati a segno, che si possono introdurre uno o due dita nella cavità della matrice, e lungo esse portarvi le taste e le fila mediante una pinzetta, e che l' utero non si dimostra troppo sensibile al contatto di questi corpi, come dovrebbe accadere nello stato suo naturale.

Una donna di civile condizione, e madre di molti figli soffriva una perdita di sangue dall' utero per tre anni di seguito, nel decorso dei quali fu dai medici trattata con molti e variati rimedj, come se non si avesse a considerare che una menorragia procedente da debolezza o inerzia della matrice. L' inutilità dei mezzi praticati mosse i medici dopo il terz' anno a consigliare l' esplorazione della matrice, da cui per altro non trassero alcun lume, sia che la malattia non cadesse sotto il tatto, sia che l' esploratore non fosse quanto conveniva esperimentato. Finalmente essendosi al sangue frammischiata una sierosità puzzolente con alcune doglie al ventre e con premiti nell' atto d' orinare, fui richiesto a dare il mio giudizio, il quale non poteva più essere dubbioso, perchè al dito esploratore si presentava un vero polipo, che dal fondo dell' utero erasi fatto strada attraverso la sua cervice in allora notabilmente allargata, e si avanzava colla sua estremità globosa entro la vagina. Eessa cominciava già a putrefarsi, sebbene l' ammarcimento non fosse tanto avanzato da potersene aspettare la caduta spontanea del polipo, ed il di lui peduncolo trovossi quasi conico ed allungato a proporzione della discesa.

Nel giorno destinato all' operazione mi recai presso l' ammalata munito dei necessarj istromenti per far passare la legatura intorno al polipo. La legatura fu eseguita, ma conobbi ben tosto che non era portata a sufficiente altezza per far ammortare tutta la sostanza poliposa, e che il rinnovare la legatura doveva riescire di non lieve molestia alla donna. Quindi dopo una istantanea riflessione mi appigliai tostamente ad un progetto più ardito. Introdussi un dito nell' ampliato orifizio dell' utero, ed a seconda del primo un altro dito, che passò senza sforzo, attesa la sottigliezza della cervice ch' era ridotta a quella cedevolezza che incontrasi nell' imminente parto; e per tal modo mi riuscì d' afferrare il peduncolo presso la base, di stirarlo e di condurlo in basso verso la vagina; indi col soccorso del pollice non esitai a torcerlo un poco, ed in seguito a strapparlo del tutto. Siccome questo polipo era piuttosto gelatinoso che carneo; così lo strappamento ebbe il più fortunato successo, e fu eseguito senza effusione di sangue, eccettuate le poche goccie che sogliono stillare anche da leggiera ferita. Cavato ch' ebbi il polipo, rimisi tosto il dito nella cervice dell' utero acciò non si stringesse; ed a favore di esso feci passare dei viluppetti di fila con una pinzetta nella cavità dell' utero. Altri ne collocai nella vagina, e la donna fu tosto rimessa a letto in situazione orizzontale.

I sintomi, che succedettero a quest' operazione, non furono di molto rilievo. Il basso ventre si gonfiò appena, ed il colamento del poco sangue fu tosto arrestato. Si stabilì in vece dalla vagina uno scolo marcioso pel tratto di dieci giorni, il quale finì per gradi, e si può

dire senza medicatura, eccettuate alcune lavature; nè altro spurgo diede l'utero, se non in capo al mese i consueti corsi periodici. Le taste si levavano a misura che venivano ammollite e sciolte dalle materie; e m'astenni a bella posta dalle così dette injezioni, sulla considerazione che riescono d' ordinario più dannose che utili.

Benchè l' esito di questa cura sia stato oltre il mio credere fortunato, pure non seppi intieramente abbandonare la pratica dell' allacciatura. Tanta possanza ha la consuetudine e l' esempio dato dagli antecessori! Per buona ventura non sono tanto frequenti cotesti mali reconditi; pure qualche volta si succedono a poca distanza l' uno dall' altro. Ad una donna di fresca età, ben conformata di corpo, stata felice nei parti, e che non fu mai soggetta ad altre malattie, cominciò a colare il sangue dall' utero fuori di tempo, senza che se ne potesse assegnare la causa. La menorragia continuò più o meno per sei mesi, nei quali la donna s' emaciò notabilmente, perdette le forze, e vi si aggiunse la febbre. Dopo alcuni giorni di decubito si risvegliano dolori ai lombi; risentesi una leggiera tensione all' ipogastrio con qualche difficoltà nel rendere le orine; e gli scoli acquistano già del fetore. In questo stato di cose visitai l' ammalata; e riconobbi esistere una massa poliposa, ch' era discesa fino alla metà della vagina, la cui periferia era sì ampia, che con istento soltanto potevasi col dito arrivare al peduncolo. Questo era del pari molto largo e resistente quanto tutta la massa poliposa; dal che era facile il comprendere che il sarcoma non era d' indole benigna. Per questo motivo, e per la diuturnità del flusso; per la universale debolezza; e probabilmente per

qualche alterazione indotta nelle parti interne, che manteneva con vigore la febbre, non se ne poteva formare che un tristo pronostico. Informata la donna della rea qualità della sua malattia chiese nondimeno con animo risoluto d'esser sottomessa all'operazione sulla fiducia di riportarne la guarigione. Egli sarebbe stato opportuno il deliberare preventivamente se nella calamitosa circostanza, in cui trovavasi la donna, conveniva in rigore d'arte l'arrischiare una cura manuale; ma il ricusare un presidio, che potevasi tentare, era lo stesso che lasciare la paziente in balìa della sinistra sorte e d'una estrema afflizione. Scegliendo il metodo dell' allacciatura, io prevedeva per una parte, che questo doveva trar seco molti inconvenienti, e segnatamente lo stiramento dell'utero, la putrefazione della massa, e lo scolo di materie rodenti; e per l' altra io non era abbastanza fornito di coraggio per appigliarmi al taglio sull' istante: altronde la perfetta inazione sembravami dover essere più nociva dell'operazione medesima; il perchè vinto dalla probabilità d' un qualche buon successo, che, operando, potevasi ottenere, e molto più spinto dalle istanze replicate dell' ammalata pronta a sottomettersi a qualunque sorta di cura, m'accinsi alla legatura del polipo.

Essa, per dir vero, non fu molto spedita, come avrebbesi desiderato, a motivo del volume poliposo, che distendeva grandemente la vagina ed ostava all' applicazione delle cannuccie. L' immediato ed unico vantaggio, che se ne ottenne, fu quello di sospendere totalmente le perdite sanguigne, che immancabilmente seguivano tutti i giorni. Non s' ottenne però l'altro più essenziale vantaggio, cioè la caduta del polipo; impe-

rocchè quantunque ei sia stato in parte ammortito, il suo peduncolo però trovossi tanto crasso e solido, che non avrebbe ceduto alla replicata legatura. Per la qual cosa io stava fra me stesso deliberando se meglio sarebbe stato il rinnovare quante legature potessero abbisognare, ovvero il troncare a un colpo tutto il polipo. Molte difficoltà s' opponevano al mio disegno pel taglio; e queste venivano anche avvalorate dalle saggie riflessioni del sig. dot. Francesco Branca, a cui comunicai le mie idee, e che di poi ebbe la compiacenza d' assistere all' operazione. Tutte le difficoltà riguardanti il dolore, l' infiammazione e la perdita di sangue, sembravano a me superabili; e solamente qualche ritegno facevami lo stato di languore in cui era caduta l' ammalata dopo la legatura, la febbre anfimerina, e quella mancanza di stomaco, come s' esprimono gli ammalati, che s' avvicina alla Lipotimia. Come però la donna in mezzo a tanti guaj persisteva nel chiedere un' altra operazione, nè al certo vi rimaneva altra speranza di vita fuorchè nel rimovimento del polipo, così io mi preparai per eseguire il troncamento del medesimo. Aveva già in pronto una cesoja di lunga asta colle lamine taglienti incurvate in avanti, e colle loro punte ottuse, a fine di non pungere alcuna parte interiore nel maneggiarla.

Collocata la donna come nell' atto d' un parto difficile, penetrai lentamente con una mano fino all' orifizio dell' utero, facendo cadere il polipo nel palmo della mano stessa. L' orifizio era ammollito e dilatato a sufficienza come nell' altra donna superiormente accennata; e perciò il detto orifizio non poteva punto ristringersi sopra

il peduncolo del polipo. Mi fu quindi facile di far passare due dita entro il collo dell' utero, e con esse prendere il gambo ed assoggettarlo. Coll'altra mano ho diretto la cesoja, ed ho fatto penetrare l' estremità tagliente e ricurva di essa sopra il dorso delle due dita, che tenevano stirata la radice. Allora dilatate le aste quant' era d' uopo, e fatto cadere il gambo fra le due taglienti lamine, con due colpi il recisi e l' estrassi dalla vagina. Il dolore nell'atto della recisione fu vivo ma istantaneo, e ben poche goccie di sangue caddero sul suolo. Il che essendo avvenuto contro ogni mia espettazione, tralasciai d'introdurre le fila nella matrice, la quale si serrò prontamente sopra il dito, che io vi manteneva per esplorare lo stato della sua cavità. Si strinse parimente il collo dopo l'estrazione del dito, e parve seguire le vicende che accadono dopo il parto. La sostanza del polipo era durissima, di tessitura uniforme, assai compatta; e secata in varj sensi non presentò alcun vaso di considerevole calibro.

Poche ore dopo l' operazione, che fu di mattina, la donna fu invasa da un ribrezzo convulsivo, che durò fino dopo il mezzo giorno. A questo sottentrò una discreta febbre a caldo, e di notte ripigliò la convulsione. La perdita fu di poco sangue dilavato. Il giorno appresso si trovò senza febbre e senza le solite doglie ai lombi ed al ventre, dalle quali per l' addietro era assai molestata; lo scolo era sieroso ed appena tinto di sangue. Nel terzo giorno fu assalita due volte dal freddo, e mantenendosi tuttavia la febbre moderata, subentrò un delirio melancolico con rutti; il ventre si fece dolente ed un po' elevato, cui si cercò di sedare con

unzioni e fomentazioni mollitive. La notte passò tranquillamente, e lo spurgo comparve tutto bianco. Alla mattina del quarto il ventre si trovò molle, ma il freddo febbrile si manifestò con oppressione al petto; ripigliò dopo il mezzodì, e per ben due volte nel corso della notte con minore forza, e ciò nulladimeno la mattina del quinto giorno non si trovò febbre. Lo scolo bianco fu scarsissimo e senza puzza. Si notava però un sintomo peggiore di tutti, cioè una certa inquietudine nell' ammalata, ed un rincrescimento di stomaco congiunto a moltissima sete. Dopo il mezzodì vomitò ogni sorta di bevanda che prese, e si ridusse ad un estremo abbattimento. S' ebbe ricorso ai gelati, co' quali il vomito cessò. All' indomani, sesto del male, presentò tutti li caratteri di una febbre nervosa, fra' quali il delirio, il soprassalto tendinoso ec. Si procurò immantinente di trar profitto dai vescicanti, dal muschio, e dal vino, di cui per altro sempre usò senza restrizione; ma inutilmente, perchè nell' ottavo giorno morì.

Non occorre qui il ricordare quanto mi sia stata grave la perdita dell' ammalata, perdita tanto vicina all' operazione, quantunque si scorgesse già prima ch' ella si sarebbe difficilmente salvata; perchè durante la menorragia aveva ella contratta una somma delicatezza e somma proclività a convellersi, ed il di lei stomaco si mostrava costantemente mal affetto. Ma dovevasi per ciò lasciare in abbandono la donna, e non tentare un mezzo che poteva forse salvarla? E la morte poi è dessa seguita per una pura cagion locale, ovvero per un morbo universale, o per la febbre nervosa effetto dell' estrema debolezza, o in fine per una suppu-

razione interna nata dal continuo irritamento portato sull' utero e sulle vicine parti? Quest' ultima causa parrà più verosimile a chi è avvezzo ad indagare negli estinti corpi le qualità dei morbi. Imperocchè le doglie che tormentavano la donna attraverso de' lombi, e lo stiramento ai fianchi che provava già da qualche tempo prima che si conoscesse l' indole del morbo, sono prove sicure d' una lenta infiammazione, che s' andava facendo, o almeno d' una prossima disposizione a tale infiammazione. Posto ciò, l' allacciatura fatta al polipo avrà sviluppata vie più questa disposizione, o avrà accresciuta quella flogòsi, ch' era in corso, e che terminò poi con una imperfetta suppurazione. Dico imperfetta, perciocchè m' è sembrato che nella cavità dell' utero e nella sua sostanza non sia accaduta, ma bensì sulla esterna superficie del medesimo, cioè nel tessuto celluloso, che lo cuopre, ed al peritoneo; nei quali casi ritrovasi o una sostanza puriforme più o meno densa che cuopre l' esterior superficie dell' utero, o una sierosità più o meno torbida. I brividi irregolari sì nell' accesso, che nella durata, i mali di stomaco, il vomito, i polsi celeri e molli, l' abbattimento universale ne fanno chiara prova.

Ora poichè un polipo uterino per lunga pezza negletto può disporre ad una funesta infiammazione; poichè la legatura può produrre lo stesso effetto mediante l' irritamento sostenuto per più giorni; perchè non si dovrà egli abbracciare il partito di recidere prontamente l' escrescenza poliposa? Si vide già che, dopo recisa, non è molto da temersi la perdita di sangue come per l' addietro s' era creduto. Ma posto an-

cora che in qualche caso essa succedesse, conviene che il professore sia istruito del modo, col quale si devono portare i topici nella matrice; come vi si possono mantenere; e qual impressione siano essi per fare su quella viscera delicatissima.

Quando il polipo, che viene amputato, ha le sue radici alla vagina o all' orifizio dell' utero, non vi può essere difficoltà veruna per introdurvi i topici necessarj. Quando poi egli trae origine dal fondo della matrice, il di lei collo, come abbiamo osservato, rimane dilatato a segno che riceve per lo meno due dita, di che n'ho recato superiormente due esempj. Col favore dunque delle dita si tiene dilatato l'orifizio quanto è d'uopo; e con una tanaglietta si portano comodamente i topici fino al fondo della matrice. Questi topici poi vengono benissimo mantenuti nella lor situazione, parte mediante il ristringimento dell'utero medesimo che succede in seguito, parte dal cono delle filaccia colle quali si procura d' otturare la cervice e la vagina. La difficoltà principale nell' usar questo metodo sta nell'impressione nocevole, che i topici potrebbero fare sopra la matrice. L' utero, a dir vero, nella sua cavità, non mi sembrò essere dotato di tanta sensibilità da non poter soffrire il contatto di qualche corpo. Forse nello stato morboso essa perde una parte della natìa delicatezza. Egli è certo altronde che le sole fila non hanno indotto alcuna mutazione sopra la medesima; ed è perciò probabile che altre sostanze ancora poco o nulla stimolanti, come la chiara d'uovo, la gomma arabica, la colofonia, possano essere tollerate dall' utero senza notabile nocumento.

Aveva di già l'Acquapendente (*De oper. chirurg.*) proposto per i polipi del naso, ed anche, secondo ch'egli espone, più volte adoperato una specie di pinzetta tagliente per troncarli; ed in quel luogo ragiona egli lungamente sopra il difetto e gl' incomodi degli stromenti conosciuti fino a quella età, ma il perfezionamento d'essi non s' avanzò. Sarebbe qui il luogo di parlare di certe altre escrescenze fungose poco dissimili dai polipi rapporto alla sostanza, le quali prendono origine da varj punti della vagina, ed anche dall'orifizio della matrice: sono però diverse dal polipo in quanto che sono più piane ed a base larga colla superficie interrotta, ed hanno un esito per lo più funesto. Imperocchè sono esse prive di peduncolo; con facilità mandano un sangue più o meno dilavato e molta sierosità; e come sono aggrappate a più punti, così difficilmente si possono strozzare colla legatura; e quantunque vi si riesca a legarle ed a farle cadere codeste carnosità, esse ripullulano tosto con eguale energia. Avvi inoltre il fondo, d' onde procedono, duro e scirroso; e molestano con intermittenti dolori or più or meno forti. Risultando dunque essere viziata la base di si fatti tumori ed avere essi moltiplici attaccature, in una parola essere di genio cancheroso, egli è evidente che tanto l' incisione quanto l'allacciatura riescirebbe infruttuosa, e che li rodenti, se alcuno vi confidasse, apporterebbono il più deciso nocumento.

II.

Dell' Idrocele nelle donne.

Nei feti di sesso femminile, in qualunque tempo s' osservino, trovasi che il processo del peritoneo è costantemente fuori dell' anello addominale, a differenza di ciò che accade nel feto mascolino; e che il funicolo vasculare o rotondo passando dietro la stessa produzione si spande nella cellulosità del pudendo. Il detto processo si mantiene cavo ed aperto verso la cavità del basso ventre nei feti di sesso femminile, senza nulla contenere e senza che mai riceva in se alcuna parte nobile. L' orifizio poi riguardante la cavità del basso ventre chiudesi o poco prima o poco dopo che il feto è uscito alla luce. Ma nel chiudersi l' orifizio suddetto, si cancella pure tutta la di lui cavità, e riducesi a sembianza d' un legamento. Può in questo cavo processo discendere dall' addomine un umore acquoso come nei maschj, prima che il medesimo si conglutini; esso però, per quanto è a mia notizia, non ha mai presentato nelle tenere bambine un carattere o specie di quella malattìa che nei maschj addimandasi *idrocèle*. M' è per altro accaduto d' osservare l' idrocèle in due donne adulte, nelle quali esso occupava precisamente quel luogo dell' inguine, in cui diramasi il legamento vasculare.

Nel 1794. fui chiamato a visitare una pazza, la quale aveva una grossezza all' inguine sinistro creduta erniosa da chi la vide prima, sebbene mancassero i principali segni indicanti la discesa dell' intestino. Il tumo-

re era di figura ovale, liscio, poco dolente, e disteso come una vescica posta obbliquamente sopra l'inguine sinistro, e che veniva a terminare sopra la sommità del corrispondente labbro del pudendo.

Mi si era rammentato che alcuni mesi prima era stato osservato un nocciolетto in quel luogo, che svanì colla compressione, e che perciò fu creduto ernioso. In seguito di questa notizia, qualunque essere potesse la natura di tale intumescenza, io tagliai gl'integumenti, come si pratica per l' ernia; ed uscitane tosto una gran copia d'acqua giallognola, altro non restava che un sacco alquanto rugoso, in cui null'altro contenevasi. Vi portai il dito, col quale mi fu agevole il ritrovare l'orifizio del sacco attraverso del così detto anello addominale, il quale rimaneva dilatato a segno che, per poco che avessi spinto il dito, sarebbe passato nella cavità del basso ventre. Mi contentai di riempiere tutto il sacco di filaccia, e di contenerle colla fasciatura; e stabilitasi la suppurazione, il corso della piaga fu breve, e si cicatrizzò senza recidiva.

L' altro idrocèle da me osservato era della mole d'un mediocre pugno, sopra il labbro sinistro della vulva in una donna d' anni 45, il quale si aumentò lentamente dopo una febbre sofferta nella state del 1796. Il tatto lasciava dubbioso il chirurgo, se egli doveva riguardare tale intumescenza per un' idrocèle o piuttosto per uno steatoma, attesa la crassezza della Cisti. Ciò non ostante, scoprendosi dentro del fluido alla percossa, mi determinai ad aprirlo per lo lungo, e n'uscì molto siero, lasciando una cavità formata da una ben fitta tonaca. Questa, affinchè non desse luogo a nuova rac-

colta, fu separata tutt' all' intorno, e dalle sottoposte parti, ed in fine recisa verso l' anello inguinale. Ivi riscontrossi un tubercolo duro e resistente, che in parte fu compreso nella sezione; e l' ammalata diede segno di molto dolore nell' atto della recisione. Mi accorsi ben tosto ch' era l' estremità del cordon vasculare ch' era stata troncata, perchè da una banda lasciò libero l' anello addominale, entro di cui potevasi insinuare l' estremità d' un dito. Non seguì per altro alcuna perdita di sangue, ma nei giorni successivi la donna fu soventi volte molestata da vomito. Un' intumescenza dolorosa occupò l' inguine, ed all' estremità troncata del cordone rotondo formossi un ingrossamento a guisa di nodo. Tutti questi sintomi però disparvero allo stabilirsi della suppurazione, che fu lunga; ma in fine la guarigione s' ottenne perfettamente.

III.

Ernia Vaginale.

Una donna d' anni 45. di temperamento robusto, molto occupata negli affari domestici, ch' ebbe due parti prematuri senza alcun séguito sinistro, del rimanente non sottoposta ad alcun' altra cagione debilitante, cominciò nel Maggio 1800. a risentire qualche doloretto dopo d' avere evacuata la vescica. In progresso il dolore andò sempre più aumentando, finchè divenne intollerabile in occasione d' aver preso un purgante: e potè accorgersi in allora di qualche rigonfiamento nella vagina. La donna soffrendo sempre di piu, fu ridotta a

non poter fare lungo cammino ne a poter attendere alle solite faccende di casa senza essere molestata da veemente dolore; ed era costretta a sdrajarsi orizzontalmente sul dorso per calmarlo. Le bevande copiose ed i clisteri emollienti erano pure per lei un efficace Palliativo. Il digiuno la rendeva più soggetta a quest' affezione; affezione che per altro non s' accompagnò mai con vomito ne meteorismo ne con arresto dell' orine o del secesso.
Si ragionò variamente da' medici e chirurghi dalla medesima consultati intorno all' indole di tal male, asserendo alcuni essere cagionato da un *virus* erpetico depostosi sulla vescica; altri da calcoli esistenti nel cavo della medesima; altri finalmente da un prolasso dell' utero.

Giunta la donna a Milano, ed inteso avendo da lei quanto sin ora ho esposto, mi fu facile di rilevare che la sede del dolore era nel piano superiore della vagina, e corrispondeva quasi alla metà dell' uretra; che di là propagavasi innanzi l' orifizio dell' uretra e della vagina stessa; che pigiando col dito, la donna dolevasene costantemente ed acremente; che ivi la vagina o sia la parete superiore d' essa formava un circoscritto prolasso o tumoretto or più or meno ampio e prominente, cioè sempre più voluminoso e dolente dopo il votamento della vescica e dopo il passeggio; all' opposto più piccolo ed assai meno dolente dopo il riposo e la giacitura orizzontale. Premendo col dito in tempo del maggior gonfiore, votavasi il sacchetto dalla parte della vagina; ed era sensibile una sorta di leggiere scroscio, allorchè spariva la porzion viscerale che vi si

era introdotta. Da questi segni non dubitai di riconoscere una discesa intestinale sopra il piano anteriore della vagina tra essa, la vescica, e l'uretra; e pensava che l'intestino potess'essere sostenuto dalla vescica distesa dall'orina; e che al contrario il votamento della medesima desse spazio all'intestino per abbassarsi e constituire un' ernia sopra il piano superiore della vagina. Ridotta che fu l'ernia, il che accadde più volte, non mi venne fatto mai di ritrovarvi un foro o apertura nella tessitura della vagina, avendo sempre il dito riscontrato un piano uniforme e sodo; dal che sono portato a pensare che non si faccia veruna disgiunzione di fibre per la formazione di quest'ernia, ma solamente un allentamento della piega del peritoneo, che passa tra la vescica e l'utero; e similmente un rilassamento di quella porzione di vagina su di cui cade l'intestino; e che questo rimanga in certo modo compresso ed impegnato tra il collo della vescica e la cervice dell'utero.

Per mantenere l'intestino ridotto, feci uso di pessarj or conici ora ovali, niuno de'quali potè soddisfare all'intento, sia perchè riuscivano molesti alla donna, sia perchè non s' opponevano del tutto alla discesa dell'intestino. Un pezzo di spugna fine modellata a foggia d' un uovo, ed investita di tela usata, soddisfece pienamente all' indicazione. La spugna così preparata e leggiermente intrisa nell' olio, o spalmata di chiara d' uovo battuto, se la introduceva da se la donna, ed aveva cura di mutarla ogni giorno lavando ed asciugando le adoperate pèr servirsene di nuovo. Da quel tempo in poi, ed a voce ed in iscritto encomiò la donna gli effetti salutari della spugna.

La descritta ernia si può dire essere delle meno frequenti; 1°: perchè succeduta tra la vescica e la matrice, ove vi è meno fondo o sia minor infossamento che tra la matrice e l' intestino retto. 2°: perchè il tumore apparve nel mezzo della parete anteriore della vagina, laddove per lo più l' intestino suol discendere per uno dei lati della vagina. 3°: perchè le pareti erano semplicemente distese, non essendosi dopo la riduzione scoperto col dito alcun divaricamento di fibre, o foro nel piano della vagina.

I V.

Della Litotomia Celsiana.

Il modo di estrarre la pietra, come ci venne descritto da Celso, è andato a' giorni nostri in disuso; e convien credere che i professori non senza gravi ragioni lo abbiano abbandonato. Benjamino Bell, il quale dice (*a*) d' avere una volta avuta un' opinione favorevole per quest' operazione, ci addita i principali motivi in contrario. Egli è di sentimento che sia quasi impossibile di tagliare direttamente sopra la pietra in vescica senza ledere nello stesso tempo i vasi deferenti, le vescichette seminali o i condotti escretorj di esse. Ed in fatti quante volte la praticò quest' Autore sopra i cadaveri con ogni possibile attenzione, altrettante trovò che o furono divise le vescichette seminali, o che rimasero recisi attraverso i loro condotti escretorj, o che

(*a*) Instit. di chirurg. Vol. II. Sez. IV.

l'uretra in moltissimi incontri veniva aperta prima che il coltello colpisse la vescica. Quindi giudica che in qualunque caso, dove l'operazione sia eseguita alla maniera di Celso, debba invariabilmente l' uretra essere aperta prima della vescica, essendo quasi impossibile di passare in vescica con un'incisione traversale senza prima traforare una parte dell' uretra, a motivo che la radice di questo canale è sospinta innanzi dalle dita introdotte nell' ano. Per evitare simili inconvenienti si studiò il Bell di correggere e di migliorare il modo d' operare, facendo un taglio traversale agl' integumenti e muscoli, ed una ferita longitudinale nella vescica direttamente sopra la pietra. Questa correzione, sebbene bastasse per evitare l' uretra, non bastò per ischivare la divisione dell' altre parti sovraccennate. V' è un altro notabile difetto nel fare quest' operazione; ed è che, venendo la vescica sospinta innanzi, ella resta ferita in un sito, che retrocedendo dappoi si sottrae all' orifizio della ferita esterna; e perciò vi è gran pericolo che l' orina s' infiltri nelle vicine parti, e produca ristagni e seni.

Queste osservazioni di Bell sopra il taglio di Celso sono della massima importanza, perchè vere in se stesse, e perchè ci porterebbero a proscrivere del tutto un' operazione che fosse susseguita costantemente da effetti dissatrosi ed immedicabili. E poichè niun altro operatore, per quanto antico sia il taglio di Celso, indicò il luogo ove viene a cadere il taglio nella vescica, esporrò quel tanto che io pure, esercitandomi sopra i cadaveri negli anni andati, ho potuto osservare e raccogliere.

Quando s' introduce ad arte la pietra in vescica, e vi si taglia sopra, tenendola fissa colle due dita nell'

ano, e poste verticalmente e senza farvi altro cangiamento, l' incisione viene a cadere nella parte inferiore ed anteriore del basso fondo della vescica in vicinanza della cervice. Ne altrimenti può accadere; imperciocchè pigiando le due dita introdotte nell' ano contro la faccia posterior della vescica e contro la pietra, questa perciò viene spinta contro la parte anteriore del basso fondo, e questa stessa parte allungatasi per l' insaccamento della pietra sarà portata più innanzi per la continuata pressione delle dita; e la pietra come insaccata presso la cervice della vescica formerà una prominenza nel perineo, più o meno sensibile, più o meno coperta dall' arco del pube. Dissi come insaccata presso la cervice; poichè sebbene la pietra non s' insinui precisamente nel collo, che a tanto non si presta, ella vi sta però così d' appresso, che se al chirurgo non riesce di mantenerla stabile in detto luogo, egli non potrà mai fissarla, nè sarà in grado di azzardare il taglio.

Ora questa pietra coperta dalla parete posteriore della vescica facendo un rialzamento più o meno notabile al perineo, dinota il sito su cui devesi incidere; e l' incisione così eseguita riescirà appunto nel luogo indicato da Bell, ed offenderà le parti dal medesimo additate.

Il modo di tagliare però non fa gli stessi effetti in mano di tutti; perchè in molti cadaveri giovanili su cui un vecchio Litotomo che però non tagliò mai alla Celsiana su' vivi, tentò l' operazione, s' osservò inciso il bulbo dell' uretra, e l' uretra medesima spaccata da parte a parte. Di più il coltello trapassando il collo della vescica aveva lesa la faccia anteriore della stessa sopra il collo, dimodochè fra i due taglj, cioè

dell' uretra perforata, e della vescica scorgevasi un piccolo tratto di cervice illeso, e colla stessa disamina sul cadavero, staccando il peritoneo dal margine superior del pube, saltava tosto agli occhj la ferita fatta nella parete anteriore della vescica.

Riflettendo io alla causa, che poteva influire sulla varietà di questi successi nel tagliare, sembravami di potere stabilire che dipendesse assolutamente dalla posizione delle dita entro l' ano, le quali si tenevano appunto diritte ed a perpendicolo col corpo della vescica; nè m' ingannai nella congettura, come in appresso riferirò.

A fine di non intaccare l' uretra, immaginai d'eseguire il taglio laterale, servendomi dell' apparato appunto di Celso, e vi riuscii in questo modo. Dopo d'avere afferrata la pietra colle due dita, indice e medio della sinistra, poste nell'intestino, procurai di condurla verso il ramo sinistro dell' ischio, ripiegando in fuori nello stesso tempo le dita a foggia d' uncino, e parallele all' orizzonte in modo che la pietra non fosse più ritenuta dall' arco del pube, ma venisse a formare una qualche elevatezza nel sito sopra cui s' incide per l' apparecchio laterale, o almeno che vi si potesse sentire distintamente la pietra stessa attraverso degl' integumenti coll' indice della mano destra.

Allora s' incomincia l' incisione non precisamente sopra la pietra, ma nel luogo stesso che si sceglie per l' apparecchio laterale, fendendo cioè in direzione un po' obbliqua i comuni integumenti; e penetrando col coltello nella stessa guisa tra i muscoli dell' uretra, si viene ad incidere porzione del collo della vescica, e la

prostata, specialmente se estendasi il taglio un po' più a sinistra. La pietra, mancandole la resistenza a misura che si taglia, s' avanza successivamente; e compiuta l' incisione interna, viene dalle prementi dita spinta fuori di vescica.

Quando la pietra è più grande, sicchè non possa insaccarsi nè distendere il principio della cervice, accade operando di non offendere il collo della vescica, e tutta l' incisione viene a cadere sulla parte laterale sinistra del corpo della vescica un po' superiormente alla prostata.

Il buon esito dunque di questa operazione, ch' è d' effettuare un taglio come nel metodo laterale, dipende, cred' io, dal rivolgere la punta delle dita verso il ramo sinistro dell' ischio dopo che s' è arrestata la pietra; perchè in questa guisa operando si fa una sola ferita alla vescica, e le dita restano meno intorpidite; laddove portando le dita verso l' arco del pube rimangon esse violentemente stirate; perdono prestamente la loro forza; la pietra vi sfugge di sotto, ed il taglio coincide col luogo del grande ed abbandonato apparecchio; ovvero rimangono offese insieme più parti le quali dovrebbero essere intatte.

Il taglio fatto nel modo or ora esposto m' è riuscito assai bene nei ragazzi dell' età dai tre agli undici anni, osservando le cautele seguenti: cioè di portare le dita traversalmente a sinistra tra il ramo discendente del pube, e l' ascendente dell' ischio; di guidare il taglio esteriore col pollice sinistro, e d' allungarlo non altrimenti che nell' apparato laterale; di comprimere il ventre colla mano destra incurvata, ed a fianco dei mu-

scoli retti per fissare la pietra, ed in modo che la mano comprimente sia più alta delle dita poste nell' ano; perchè il pigiare su' muscoli retti dell' addomine è opera perduta e fors' anche nociva, a motivo che nei ragazzi piangenti sono i detti muscoli in una continua tensione.

Se una così piccola circostanza può far cangiare totalmente la natura e la situazione del taglio, egli reca certamente meraviglia come niuno degli antichi maestri abbia parlato del modo di collocare le dita che s' intromettono nel retto. Cornelio Celso (*a*) si spiega in poche parole " medicus deinde sinistræ manus duos „ digitos indicem et medium simul in anum ejus de- „ mittit; dexteraeque digitos super imum abdomen le- „ niter imponit. " A questo passo il Morgagni nella pistola sesta sopra Celso non fece altra correzione, se non quella che riguarda l' introduzione delle dita nell' ano, scrivendo: " Leniter prius unum (*digitum*) dein- „ de alterum in anum ejus demittit. " La qual lezione sull' autorità d' antichi codici pareva a quel grand' Uomo la migliore. Nè gli altri che hanno scritto dappoi intorno alla Litotomía, come Paolo (*d*) Albucasi (*c*) Fleister (*b*), hanno fatta riflessione alla maniera colla quale vanno collocate le dita nell' ano.

Una cosa, ch' è stata corretta, ed intorno a cui si è molto disputato, si è la figura che deve darsi all' in-

---

(*a*) Lib. VIII. cap. 26.
(*b*) Lib. VI. cap. 60.
(*c*) Tractat. II. cap. 60.
(*d*) Chirurg. part. II. sect. V.

cisione esteriore, la quale, pel modo con cui fu da Celso per la prima volta descritta, pare che da niuno sia stata ben intesa. Egli parla così: " juxta anum incidi „ cutis plaga lunata juxta ad cervicem vesicæ debet, „ cornubus ad coxas spectantibus paululum: deinde ea „ parte qua strictior ima plaga est, etiamnum sub cu- „ te, altera transversa plaga facienda est, qua cervix „ aperiatur, donec urinæ iter pateat sic, ut plaga pa- „ ulo major quam calculus sit. " Il Morgagni (a) è di sentimento che nel testo vi sia un' inutile ripetizione di parole, e lo corregge in questo modo: " Cum jam „ eò (*calculus*) venit, incidi super vesicæ cervicem ju- „ xta anum cutis plaga lunata usque ad cervicem vesi- „ cæ debet. " Questa correzione non ci offre alcuno schiarimento rapporto alla maniera d' incidere, ed alla figura che deve avere il taglio.

Il ch. Carlo Federigo Clossius s'è proposto d'emendare il passo celsiano in una particolar dissertazione, che pubblicò a Tubinga nel 1792. In essa dopo d'aver riportato per intiero il suddetto testo, egli congettura che dopo queste parole " Cum jam eò venit, incidi su- „ per vesicæ cervicem " vi sia una lacuna od una omissione che n'oscura il senso. Il che in fatti pare assai probabile, trovandosi ivi ripetute, senza che l'esposizione ne sia più chiara, il *super vesicæ cervicem*, e l' *usque ad vesicæ cervicem*.

Posto ciò egli prende ad esaminare alcuni punti per vie meglio rischiarare il testo di Celso; cioè se nel picciolo apparecchio l' incisione si faccia alla cervi-

(*a*) Epist. VII. in Cels. p. 201.

ce o nel corpo della vescica; qual direzione avesse il taglio lunato; cosa s'abbia a pensare del taglio traversale; e finalmente qual significazione abbiano quelle parole *etiamnum sub cute*.

E riguardo al primo punto Clossius è d' opinione che il calcolo non possa entrare nel collo della vescica, ostandovi la pròstata, lo sfintère della vescica, ed il legamento molto forte della sincondrosi del pube, per le quali cose il taglio deve necessariamente cadere sul corpo della vescica. La direzione poi dell' incisione lunata è tale, che colle sue estremità (*cornubus*) riguarda le anche (*coxas*). Ora per il nome *Coxae* non s'intendono già le tuberosità ischiatiche, ma gli acetaboli o una parte dei medesimi. L'incisione si faceva alla sinistra del perineo, ed un poco obbliquamente, di modo che l' estremità del taglio erano rivòlte verso l'acetabolo sinistro, e la parte convessa del medesimo verso l' ano, e conseguentemente la concava riguardava il ramo discendente del pube e l'ascendente dell' ischio. Per la qual cosa si deve supporre che Bromfield abbia mal inteso il passaggio di Celso, perchè tagliava non al lato, ma sopra l' ano coll' estremità rivolte verso la tuberosità dell' ischio, e col margine convesso verso lo scroto.

L' incisione semilunare permette un' uscita più facile al calcolo, il che non pare che dai moderni sia stato avvertito; e nello stesso tempo si schiva la commessura dello scroto, la cui lesione era riputata mortale dagli Antichi. Il solo Le-Cat dava una direzione un po' curva al taglio. L'incisione per tal modo eseguita riesciva poi traversale rispetto al corpo della vescica:

e rispetto al taglio semilunare diventava obbliqua e longitudinale. Sicchè non è da supporsi che al taglio semilunare vi sia aggiunta una nuova ferita traversale. E che ciò sia vero si deduce dalla descrizione lasciataci da Paolo e da Avicenna.

L'ultime parole *etiamnum sub cute*, secondo Clossius, significano che non debbasi allungare troppo in basso l' incisione interna, a fine di non offendere l' intestino retto e l' arterie emorroidali, e per non dar comodo all' orina di deporsi nel Tessuto celluloso; e quindi doversi tagliare la vescica, dirigendo lo scalpello obbliquamente in alto, di modo che la superior parte di tale interna ferita venga ricoperta dalla cute e dall' angolo superiore dell' incisione semilunare. Dal che è chiaro che col metodo celsiano s' incide il corpo e non la cervice della vescica; che la direzione della piaga lunata alla sinistra del perineo era obbliqua coll' estremità o corni rivolti verso l' acetabolo sinistro; che l' altra piaga o sia l' interna aveva la stessa direzione riguardo al perineo; e rispetto al corpo della vescica poteva riguardarsi come traversale.

La spiegazione del testo di Celso data da Clossius concorda esattamente con quanto noi abbiamo osservato sopra i cadaveri tagliati, ed eseguito felicemente su' viventi; se non che per ottenere un' incisione traversale nel corpo della vescica, è indispensabile che le dita siano collocate alla maniera da noi sovrindicata.

Restando dunque nell' operazione tagliato il corpo della vescica (sotto però il peritoneo) e non il collo, aveva qualche ragione Clossius di dire che il calcolo non poteva giammai entrare nel collo della me-

desima. Io tuttavolta ho potuto accertarmi che il calcolo d'una data piccolezza può entrare nel principio della cervice vescicale, sia spontaneamente, sia per opera delle dita che lo incalzano, e che in tal caso rimane incisa anche porzione di collo della vescica. E siccome il collo nei fanciulli è molto dilatabile, contro ciò che ne pensa Clossius, e non di rado vi s'impegnano le pietre, che rendono alquanto difficile il passaggio della siringa, aveva Celso grande motivo d'inculcare di far sì che il calcolo si portasse al collo della vescica, senza di che non potrebbe essere fissato al di dentro colle dita, ne sentito di fuori attraverso degl'integumenti. E perciò prima di devenire all'operazione raccomanda il passeggio: „ Ambulandi verò inter hæc exercitatione utatur, quo „ magis calculus ad vesicæ cervicem descendat. " Il che se sia accaduto, si riconoscerà colle dita portate nell'ano. A quest' intento descrive anche una posizione da serbarsi nell'operare, attissima a mantenerlo stabile verso la cervice della vescica, che consiste nel far tenere il ragazzo alquanto supino sopra le coscie d' una robusta persona: e non contento di questo, ci avverte di nuovo, prima d'incominciare il taglio, d'assicurarci se il calcolo esiste presso la cervice della vescica. (*a*)

Paolo da Egina (*b*) trattando di quest' operazione non si diffonde tanto, come Celso, nell'indicare tutte le cautele opportune per la buona riuscita. Egli ci propone però in termini abbastanza chiari il taglio laterale, quale noi l'abbiamo adottato. " Ipsi, dic'egli, assumpto „ scalpello ad calculos aptato inter anum et testiculos,

---

(*a*) Cels. de med. lib. VII. cap. 26. edit. Comin.
(*b*) Lib. VI. cap. 60.

„ non per medium locum inter scrotum, et anum, sed „ in alteram partem juxta sinistriorem clunem, obli- „ quam super lapidem, qui subjicitur incidendis, du- „ cemus lineam quæ extrinsecus latum habeat spatium, „ intus non amplius, quam ut calculus per id queat „ excidere. “ Quasi lo stesso processo ha voluto additarci Albucasi quando scrisse: “ et finde in eo (*puero*) „ quod est inter anum et testiculos, et non in medio, „ ad latus natis sinistræ, et fit sectio super ipsum la- „ pidem, et digitus tuus sit in ano, et fiat sectio tran- „ sversa, ut sit sectio exterius ampla. “ (*a*)

In una maniera ancora più precisa trovasi descritto il taglio laterale da praticarsi nel piccolo apparecchio in Eistero (*b*); se non che egli pure insieme agli altri omette di spiegare quale esser debba la posizione delle dita intromesse nell' ano, e quali siano le parti che, in tal guisa operando, rimangano incise.

Sebbene il metodo celsiano si possa in alcuni casi eseguire con felicità, e si debba preferire per la sua semplicità; non si deve per altro proporlo come metodo generale. Celso in fatti aveva di già notate le difficoltà che s' opponevano al felice eseguimento di esso, e sono 1°. quando il calcolo non iscende e non si può arrestare al collo della vescica, sicchè fia d' uopo di premere lungamente colle dita, e bruscamente sul basso ventre, dal che in fine si suscitano dolori ed infiammazioni o della vescica o degl' intestini 2°. quando il calcolo sia troppo grosso, sicchè non s' insinui nel col-

(*a*) Tractat. II. cap. 60.
(*b*) Chirurg. part. II. sect. V. cap. 29.

lo della vescica, e perciò non si possa distintamente sentire col dito al perineo. 3°. quando il calcolo è troppo aspro, spinoso, ed ineguale, onde s' abbia a temere un' emorragia o le convulsioni in grazia delle lacerazioni che seguono sì alla vescica che al taglio. 4°. quando il calcolo esiste in un soggetto adulto in cui d' ordinario le dita, per la grossezza del pube, non possosono giugnere ad afferrare e ritenere il calcolo presso il perineo.

ELEMENTI

Di trigonometrìa sferoidica

Di Barnaba Oriani

Ricevuti il dì primo di Luglio 1804.

1. Sotto questo medesimo titolo l' immortale *Eulero* ha pubblicato una memoria fra quelle dell' accademia reale delle scienze di Berlino per l'anno 1753. In essa egli considera la terra come uno sferoide generato dalla rivoluzione d'un' elisse intorno al suo asse minore, e supponendo dati nella sua superficie due punti collocati sotto due diversi Meridiani, determina la via brevissima che conduce da un punto all' altro. Colla teoria de' massimi e minimi da lui esposta nell' insigne sua opera "*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* " ottiene tre equazioni esprimenti i rapporti che hanno fra loro i sei elementi d' un triangolo sferoidico formato dai due Meridiani che si uniscono al polo, e dalla via brevissima che taglia i due Meridiani nei punti dati.

2. Alcuni anni prima l' acutissimo geometra *Clairaut* aveva già trovato le stesse equazioni (*a*) colla sola limitazione, che il triangolo sferoidico da lui considerato, era rettangolo; talchè la via brevissima tagliava

(a) *Memoires de l'Académie R. des Sciences de Paris, années 1733. et 1739.*

perpendicolarmente un Meridiano in uno dei due dati punti.

3. Solamente la prima delle tre equazioni era espressa in termini finiti, e conteneva il rapporto che passa fra gli azimut o sia fra gli angoli formati dalla via brevissima co' due Meridiani, e le latitudini dei due dati punti. La seconda esprimeva il rapporto fra i differenziali della via brevissima e di una delle date latitudini; la terza il rapporto fra i differenziali della longitudine o sia dell' angolo formato al polo dai due Meridiani, e della stessa latitudine. Era dunque necessario integrare le due ultime equazioni per ottenere un valore finito della via brevissima e della differenza di longitudine fra i dati punti. Tutti e due i citati geometri integrarono queste equazioni; ma attesa la picciola differenza che passava fra gli assi dello sferoide terrestre, ed attesa la complicazione delle formole, si contentarono di determinare i due soli primi termini delle serie esprimenti gl' integrali, trascurando gli altri che contenevano la seconda e le più alte potenze della stessa differenza degli assi.

4. Nel caso di un triangolo sferoidico rettangolo considerato da *Clairaut* le dette due serie riescono regolari; e pochi termini bastano a far conoscere la forma di qualunque termine seguente; ma nel caso più generale d'un triangolo sferoidico obbliquangolo le serie sono meno semplici, ed è necessario calcolare più termini avanti di conoscere l' indole dei termini seguenti. Avendo pertanto *Eulero* osservato che i soli due primi termini dei valori della via brevissima e della differenza di longitudine erano molto complicati, non ha

dubitato di asserire, (a) che se in vece di determinare questi due valori per mezzo delle date latitudini e degli angoli azimuttali, si proponeva di determinare o la latitudine o l' azimut per mezzo della via brevissima e della differenza di longitudine, il problema diventava intrattabile, e quindi molte questioni di trigonometria sferoidica riuscivano insolubili.

5. Il valente analista *Du-Séjour* venticinque anni dopo tentò (b) di rendere più semplici l' equazioni sopra indicate, rapportando il triangolo sferoidico ad un triangolo corrispondente sulla sfera inscritta allo sferoide, cioè sulla sfera che ha per diametro l' asse minore dell' elisse generatrice. Egli trattò diffusamente il caso limitato del triangolo sferoidico rettangolo considerato da *Clairaut*, ed espose gl' integrali delle due equazioni nel caso più generale del triangolo obbliquangolo, determinando il terzo termine che contiene il quadrato della differenza degli assi. Non fece però alcun uso di questo termine, giudicandolo troppo tenue ed insensibile, e si contentò di ritenere i due soli primi termini, come avevano fatto *Clairaut* ed *Eulero*. Sciolse il problema, che aveva già sciolto *Clairaut*, di trovare la latitudine di uno dei due dati punti per

---

(a) „ Mais il n' en est pas de même si l'un des deux autres élémens „ ω et LM (c'est-à-dire la différence en longitude, ou le chemin le plus „ court) se trouvoit parmi les connues; car puisque les formules, qui ex- „ priment les valeurs de ω et LM, sont si compliquées, et qu' elles n' ont „ lieu que lorsque la différence des axes est extrêmement petite, on n'en „ saurait éliminer les élémens inconnus. " *Histoire de l' Académie R. des Sciences de Berlin: année 1753. pag. 277.*

(b) *Mémoires de l' Académie R. des Sciences de Paris. Année 1778.*

mezzo della via brevissima, della latitudine e dell'azimut dell'altro punto.

6. La soluzione però di questo problema, tanto nel metodo di *Clairaut* quanto in quello di *Du-Séjour*, è molto ovvia finchè si trascurano i termini moltiplicati nel quadrato e nelle più alte potenze della differenza degli assi. Il primo ed il solo che abbia sciolto lo stesso problema, ritenendo il terzo termine moltiplicato nel quadrato della differenza degli assi, si è l'ingegnosissimo geometra *Le-Gendre* (*a*). Egli però ha soppressa la dimostrazione della sua formola, e nessun altro finora, per quanto io sappia, vi ha supplito.

7. Quasi contemporaneamente a *Le-Gendre* ha pubblicato due memorie sulla trigonometria sferoidica il segretario dell' accademia delle scienze di Torino, *De-Caluso* (*b*). Egli riducendo, come fece *Du-Séjour*, il triangolo sferoidico ad un triangolo sulla sfera inscritta, trovò la legge delle serie esprimenti la via brevissima e la differenza in longitudine fra due punti dati. Ma giudicò com'*Eulero*, che i problemi inversi, cioè quelli ne' quali entrano come quantità date la via brevissima o la differenza di longitudine, erano complicatissimi, e che forse non ammettevano alcuna soluzione diretta, onde s' appigliò nei diversi casi particolari al metodo indiretto delle false posizioni.

8. Anche il segretario dell'Istituto nazionale Francese *Delambre* ha pubblicato ultimamente (*c*) delle for-

(*a*) *Mémoires de l' Académie R. des Sciences de Paris. Année 1787 pag. 368.*

(*b*) *Mémoires de l' Académie R. de Turin. vol. IV et V.*

(*c*) *Méthodes analytiques pour la détermination d' un arc du Méridien; à Paris, An VII.*

mole per la soluzione di uno dei detti problemi inversi; ma essendo esse limitate al triangolo sferoidico, in cui uno dei lati è supposto picciolissimo rispetto agli altri due, non possono considerarsi come soluzioni complete di trigonometria sferoidica.

9. L'analisi nell'ultimo passato secolo ha fatto dei progressi immensi, e si è arricchita di metodi nuovi ed eleganti; essa può dunque somministrarci dei mezzi onde sciogliere i problemi creduti da prima insolubili. Quindi ho tentato di trovare le soluzioni dirette delle principali questioni che si possono proporre in un triangolo sferoidico elittico che abbia uno degli angoli nel polo. In questo triangolo vi sono sei elementi, cioè le due latitudini, ed i due azimut dei dati due punti, la via brevissima e la differenza di longitudine fra gli stessi punti. Se saranno dati tre di questi elementi, qualunque essi siano, determineremo con essi gli altri tre elementi ignoti. Le combinazioni che si possono fare, tre a tre, de'sei elementi, son venti; ma essendo tanto le due latitudini quanto i due azimut permutabili fra loro a vicenda, esse si riducono a dodici.

10. Divideremo queste ricerche in due parti. Nella prima daremo le tre equazioni fondamentali della trigonometria sferoidica, portando le serie a qualunque numero di termini; e cercheremo la soluzione del problema, in cui per mezzo della via brevissima, della latitudine, e dell' azimut di un punto dato sullo sferoide, si determina la latitudine dell' altro punto. La stessa soluzione ci somministrerà, come un semplice corollario, la dimostrazione della formola sopra citata di *Le-Gendre*. Nella seconda parte risolveremo il restan-

te dei dodici problemi che si possono proporre in un triangolo sferoidico elittico.

Parte Prima.

Formole fondamentali della trigonometrìa sferoidica.

11. Fig. I^a. Sia C il centro dello sferoide; CE$=$a il semiasse maggiorè; e CP$=$b il semiasse minore dell' elisse PEA, dalla cui rivoluzione intorno all' asse PA vien generato lo sferoide. Chiamisi P il *polo*; PME l'arco del *Meridiano*; CE il raggio dell' *Equatore*. Si tirino a qualunque punto M l' ascissa QM$=$CS$=$x, e l' ordinata SM $=$ QC $=$ y; si avrà l' equazione
$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$

12. Allo stesso punto M si conduca la normale MN, e chiamisi l' angolo MNE $= \phi$ la latitudine del punto M; si avrà tang $\phi = \frac{SM}{SN}$. Essendo poi la sottonormale SN

$$= - \frac{y\,dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\,x, \text{ sarà}$$

$$\text{tang. } \phi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}{b\,x}.$$

Quindi si avrà

$$x = QM = \frac{a^2 \cos\phi}{\sqrt{(a^2 \cos\phi^2 + b^2 \operatorname{sen}\phi^2)}}$$

$$y = SM = \frac{b^2 \operatorname{sen}\phi}{\sqrt{(a^2 \cos\phi^2 + b^2 \operatorname{sen}\phi^2)}},$$

e l'arco elementare

$$Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a^2 b^2 d\phi}{(a^2 \cos\phi^2 + b^2 \operatorname{sen}\phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

13. Pongasi l' eccentricità dell' elisse PEA espressa in parti del semiasse maggiore

$= e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$, talchè sia $b = a\sqrt{(1 - e^2)}$, avremo

$$x = \frac{a \cos\phi}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}\phi^2)}}\ ;\ y = \frac{a(1 - e^2)\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}\phi^2)}}$$

$$Mm = \frac{a(1 - e^2)\, d\phi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}\phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

14. Se l' eccentricità si vuole esprimere in parti del semiasse minore, e si fa $= \Delta = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b}$, sarà

$\Delta^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$, ovvero $e^2 = \frac{\Delta^2}{1 + \Delta^2}$, e si avrà

$a = b\sqrt{(1 + \Delta^2)}$: onde risulta

$$x = \frac{b(1 + \Delta^2)\cos\phi}{\sqrt{(1 + \Delta^2 \cos\phi^2)}}\ ;\ y = \frac{b \operatorname{sen}\phi}{\sqrt{(1 + \Delta^2 \cos\phi^2)}}$$

$$Mm = \frac{b(1 + \Delta^2)\, d\phi}{(1 + \Delta^2 \cos\phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

15. Volendosi esprimere l' arco $d\phi$ in gradi d' un circolo descritto col raggio $= 1$, bisognerà moltiplicare $d\phi$ per $\frac{\pi}{180}$, facendo $\pi = 3,14159265$ ec. Se poi lo stesso arco si vuol esprimere in minuti secondi, si mol-

tiplicherà $d\phi$ per $\frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{60^2} =$ sen $1''$. Quindi se nella latitudine $= \phi$ l' arco di un grado è

$$G = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{a(1-e^2)\,d\phi}{(1-e^2 \operatorname{sen}\phi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

e nella latitudine $= \lambda$ l'arco di un grado è

$$G' = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{(1-e^2 \operatorname{sen}\lambda^2)^{\frac{3}{2}}};$$

essendo $d\phi = d\lambda = 1$, avremo

$$e^2 = \frac{1-\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}}}{\operatorname{sen}\phi^2 - \left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}\lambda^2}.$$

Sia, per esempio, nella latitudine $\lambda = 0$, o sia sotto l' Equatore $G' = \frac{\pi}{180} \cdot a(1-e^2) = 56753$ tese francesi, e nella latitudine $\phi = 46^\circ\ 11'\ 58''$ sia $G = 57018,4$ tese; sarà

$$e^2 = \frac{1-\left(\frac{56753}{57018,4}\right)^{\frac{2}{3}}}{(\operatorname{sen} 46^\circ\ 11'\ 58'')^2} = 0,0059614825$$

$$\Delta^2 = \frac{e^2}{1-e^2} = 0,0059972349$$

$$a = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{G'}{1-e^2} = 3271209 \text{ tese}$$

$$b = a\sqrt{(1-e^2)} = 3261443 \text{ tese}$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{334,96}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{1}{333,96}$$

Nella stessa ipotesi l' arco di un grado del Meridiano nella latitudine $\phi = 45^\circ$ sarà

$$= \frac{\pi}{180} \cdot \frac{a(1-e^2)}{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{56753}{(1-\frac{e^2}{2})^{\frac{1}{2}}} = 57007,7 \text{ tese.}$$

16. Un arco qualunque EM del Meridiano, compreso fra l' Equatore E ed il punto M posto alla latitudine ϕ, sarà (§. 13.)

$$EM = a(1-e^2)\int \frac{d\phi}{(1-e^2 \operatorname{sen}\phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= a(1-e^2)\int d\phi \left[1 + \frac{3}{2}e^2 \operatorname{sen}\phi^2 + \frac{3.5}{2.4}e^4 \operatorname{sen}\phi^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}e^6 \operatorname{sen}\phi^6 + \text{ec.}\right]$$

e siccome si ha

$$\int d\phi \operatorname{sen}\phi^{2n} = \frac{1.3.5.7.9\ldots 2n-1}{2.4.6.8.10\ldots\ldots 2n}\phi - \frac{1.3.5.7.9\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6.8.10\ldots\ldots 2n}\operatorname{sen}\phi\cos\phi$$

$$- \frac{1.5.7.9\ldots 2n-1}{4.6.8.10\ldots\ldots 2n}\operatorname{sen}\phi^3\cos\phi - \frac{1.7.9\ldots\ldots 2n-1}{6.8.10\ldots\ldots 2n}\operatorname{sen}\phi^5\cos\phi$$

$$- \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{2n}\operatorname{sen}\phi^{2n-1}\cos\phi$$

facendo per brevità

$$(1-e^2)\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}e^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3.5}{2.4}e^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{3.5.7}{2.4.6}e^6\right.$$
$$\left.+\text{ ec.}\right]=1-\alpha$$

ovvero

$$\alpha=\frac{1}{2^2}e^2+\frac{1.3}{2^2.4^2}e^4+\frac{1.3^2.5.}{2^2.4^2.6^2.}e^6+\frac{1.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}e^8+\text{ ec.}$$

$$K'=e^2-\alpha$$

$$K''=\frac{2}{3}K'-\frac{1}{2}e^2(1-e^2)$$

$$K'''=\frac{4}{5}K''-\frac{1.3}{2.4}e^4(1-e^2)$$

$$K^{IV}=\frac{6}{7}K'''-\frac{1.3.5}{2.4.6}e^6(1-e^2)$$

ec.

avremo

$$\frac{EM}{a}=(1-\alpha)\phi-K'\operatorname{sen}\phi\cos\phi-K''\operatorname{sen}\phi^3\cos\phi$$
$$-K'''\operatorname{sen}\phi^5\cos\phi-\text{ ec.}$$

Ma è generalmente

$$\operatorname{sen}\phi^{2n-1}\cos\phi=\pm\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\operatorname{sen}2n\phi-\frac{2n-2}{1}\operatorname{sen}(2n-2)\phi\right.$$
$$+\frac{2n-4}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\operatorname{sen}(2n-4)\phi$$
$$-\frac{2n-6}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-2}{3}\operatorname{sen}(2n-6)\phi$$
$$\left.+\text{ ec.}\right]$$

nella qual espressione il segno superiore ha luogo quando n è numero dispari, e l' inferiore quando n è numero pari. Facendo dunque

$$\beta = \frac{K'}{1} + \frac{2}{1}\cdot\frac{K''}{2^3} + \frac{2.5}{1.2}\cdot\frac{K'''}{2^5} + \frac{2.6.7}{1.2.3}\cdot\frac{K^{IV}}{2^7} + \frac{2.7.8.9}{1.2.3.4}\cdot\frac{K^{V}}{2^9} + \text{ec.}$$

$$\gamma = \frac{K''}{2^3} + \frac{4}{1}\cdot\frac{K'''}{2^5} + \frac{4.7}{1.2}\cdot\frac{K^{IV}}{2^7} + \frac{4.8.9}{1.2.3}\cdot\frac{K^{V}}{2^9} + \frac{4.9.10.11}{1.2.3.4}\cdot\frac{K^{VI}}{2^{11}} + \text{ec.}$$

$$\delta = \frac{K'''}{2^5} + \frac{6}{1}\cdot\frac{K^{IV}}{2^7} + \frac{6.9}{1.2}\cdot\frac{K^{V}}{2^9} + \frac{6.10.11}{1.2.3}\cdot\frac{K^{VI}}{2^{11}} + \frac{6.11.12.13}{1.2.3.4}\cdot\frac{K^{VII}}{2^{13}} + \text{ec.}$$

ec.

si otterrà

$$\frac{EM}{a} = (1-\alpha)\,\phi - \beta \text{ sen } 2\phi + \gamma \text{ sen } 4\phi - \delta \text{ sen } 6\phi + \text{ec.}$$

Similmente, posta $= \lambda$ la latitudine del punto L, si avrà

$$\frac{EL}{a} = (1-\alpha)\,\lambda - \beta \text{ sen } 2\lambda + \gamma \text{ sen } 4\lambda - \delta \text{ sen } 6\lambda + \text{ec.}$$

Quindi ne risulta per un arco qualunque del *Meridiano* LM compreso fra le latitudini ϕ, e λ l' equazione

$$\frac{LM}{a} = (1-\alpha)(\phi-\lambda) - \beta(\text{sen } 2\phi - \text{sen } 2\lambda) + \gamma(\text{sen } 4\phi - \text{sen } 4\lambda) - \delta(\text{sen } 6\phi - \text{sen } 6\lambda) + \text{ec.}$$

ovvero ancora

$$\frac{LM}{a} = (1-\alpha)(\phi-\lambda) - 2\beta \text{ sen}(\phi-\lambda)\cos(\phi+\lambda) + 2\gamma \text{ sen } 2(\phi-\lambda)\cos 2(\phi+\lambda) - 2\delta \text{ sen } 3(\phi-\lambda)\cos 3(\phi+\lambda) + \text{ec.}$$

17. Si ha dall' equazione precedente il rapporto fra l' arco elittico L M ed il raggio a dell' *Equatore*.

Se si volesse il rapporto $\frac{LM}{b}$ fra lo stesso arco ed il semiasse minore b, essendo (§. 13.)

$a = \frac{b}{\sqrt{(1 - e^2)}}$, bisognerebbe moltiplicare tutti i termini del secondo membro dell' equazione per $\sqrt{(1 - e^2)}$; oppure s' integrerà la formola (§. 14.)

$d.EM = \frac{b(1 + \Delta^2)\, d\phi}{(1 + \Delta^2 \cos\phi^2)^{\frac{3}{2}}}$, poichè si avrà

$$\frac{EM}{b} = (1 + \Delta^2) \int d\phi \left(1 - \frac{3}{2}\Delta^2 \cos\phi^2 + \frac{3.5}{2.4}\Delta^4 \cos\phi^4 - \frac{3\,5\,7}{2.4.6}\Delta^6 \cos\phi^6 + \text{ec.}\right)$$

Ora essendo generalmente

$$\int d\phi \cos\phi^{2n} = \frac{1.3.5\,7.9\ldots 2n-1}{2.4.6.8.10\ldots\ldots 2n}\phi + \frac{1.3.5.7.9\ldots 2n-1}{2.4.6.8.10\ldots\ldots 2n}\operatorname{sen}\phi\cos\phi + \frac{1.5.7.9..2n-1}{4\,6.8.10\ldots\ldots 2n}\operatorname{sen}\phi\cos\phi^3 + \frac{1.7.9\ldots 2n-1}{6.8.10\ldots\ldots 2n}\operatorname{sen}\phi\cos\phi^5 + \text{ec.} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2n}\operatorname{sen}\phi\cos\phi^{2n-1}.$$

mettendo per brevità

$$\alpha' = \frac{1}{2^2}\Delta^2 - \frac{1.3}{2^2.4^2}\Delta^4 + \frac{1.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\Delta^6 - \frac{1.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}\Delta^8 + \text{ec.}$$

$$= \frac{1}{2^2}e^2 + \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{3}{4^2}\right)e^4$$

$$+ \frac{1}{2^2}\left(1 - 2\,\frac{3}{4^2} + \frac{3^2.5}{4^2.6^2}\right)e^6$$

$$+ \frac{1}{2^2}\left(1 - 3\,\frac{3}{4^2} + 3\,\frac{3^2.5}{4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7}{4^2.6^2.8^2}\right)e^8$$

$$+ \text{ec.} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{3}{4^2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{3^2.5}{4^2.6^2} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{3^2.5^2.7}{4^2.6^2.8^2} + \text{ec.}\right)e^{2n+2}$$

ed inoltre

$$h' = \Delta^2 - \alpha' \qquad = \frac{e^2}{1-e^2} - \alpha'$$

$$h'' = \frac{1}{2}\Delta^2(1+\Delta^2) - \frac{2}{3}h' \qquad = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{2}{3}h'$$

$$h''' = \frac{1.3}{2.4}\Delta^4(1+\Delta^2) - \frac{4}{5}h'' \qquad = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{e^4}{(1-e^2)^3} - \frac{4}{5}h''$$

$$h^{\text{IV}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\Delta^6(1+\Delta^2) - \frac{6}{7}h''' = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{e^6}{(1-e^2)^4} - \frac{6}{7}h'''$$

ec.

avremo

$$\frac{EM}{b} = (1+\alpha')\phi - h'\,\text{sen}\,\phi\cos\phi + h''\,\text{sen}\,\phi\cos\phi^3 - h'''\,\text{sen}\,\phi\cos\phi^5 + \text{ec.}$$

ed essendo in generale

$$\text{sen}\,\phi\cos\phi^{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-1}}\Big[\text{sen}\,2n\,\phi+\frac{2n-2}{1}\,\text{sen}\,(2n-2)\,\phi$$

$$+\frac{2n-4}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\,\text{sen}(2n-4)\,\phi$$

$$+\frac{2n-6}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-2}{3}\,\text{sen}(2n-6)\,\phi$$

$$+\text{ec.}\Big]$$

supponendo

$$\beta'=\frac{h'}{2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{h''}{2^3}+\frac{2.5}{1.2}\cdot\frac{h'''}{2^5}-\frac{2.6.7}{1.2.3}\cdot\frac{h^{IV}}{2^7}+\frac{2.7.8.9}{1.2.3.4}\cdot\frac{h^{V}}{2^9}-\text{ec.}$$

$$\gamma'=\frac{h''}{2^3}-\frac{4}{1}\cdot\frac{h'''}{2^5}+\frac{4.7}{1.2}\cdot\frac{h^{IV}}{2^7}-\frac{4.8.9}{1.2.3}\cdot\frac{h^{V}}{2^9}+\frac{4.9.10.11}{1.\,2.\,3.\,4}\cdot\frac{h^{VI}}{2^{11}}-\text{ec.}$$

$$\delta'=\frac{h'''}{2^5}-\frac{6}{1}\cdot\frac{h^{IV}}{2^7}+\frac{6.9}{1.2}\cdot\frac{h^{V}}{2^9}-\frac{6.10.11}{1.\,2.\,3}\cdot\frac{h^{VI}}{2^{11}}+\frac{6.11.12.13}{1.\,2.\,3.\,4}\cdot\frac{h^{VII}}{2^{13}}-\text{ec.}$$

ec.

si avrà

$$\frac{EM}{b}=(1+\alpha')\,\phi-\beta'\,\text{sen}\,2\,\phi+\gamma'\,\text{sen}\,4\,\phi-\delta'\,\text{sen}\,6\,\phi+\text{ec.}$$

e posta $=\lambda$ la latitudine del punto L, mentre quella del punto M è $=\phi$, avremo

$$\frac{LM}{b}=(1+\alpha')(\phi-\lambda)-\beta'(\text{sen}\,2\phi-\text{sen}\,2\lambda)+\gamma'(\text{sen}\,4\phi-\text{sen}\,4\lambda)$$
$$-\delta'(\text{sen}\,6\,\phi-\text{sen}\,6\,\lambda)+\text{ec.}$$

o sia

$$\frac{LM}{b}=(1+\alpha')(\phi-\lambda)-2\,\beta'\,\text{sen}\,(\phi-\lambda)\cos(\phi+\lambda)$$
$$+2\,\gamma'\,\text{sen}\,2\,(\phi-\lambda)\cos 2\,(\phi+\lambda)$$
$$-2\,\delta'\,\text{sen}\,3\,(\phi-\lambda)\cos 3\,(\phi+\lambda)$$
$$+\text{ec.}$$

18. Se l' arco $\phi - \lambda$ è espresso in gradi e decimali di grado (§. 15.), il primo termine dell' equazioni trovate (§§. 16. 17), cioè $(1 - \alpha)(\phi - \lambda)$, e

$(1 + \alpha')(\phi - \lambda)$ si moltiplicherà per $\frac{\pi}{180}$. Se poi l' arco $\phi - \lambda$ si esprime in minuti secondi, si moltiplicherà

lo stesso primo termine per $\frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{60^2} = \text{sen } 1.''$

19. Fig. II.ª Sieno dati nella superficie sferoidica due punti L e M, il primo de' quali sia nel *Meridiano* PL ed abbia la latitudine $= \lambda$; il secondo nel *Meridiano* PM abbia la latitudine $= \phi$; e cerchisi nella stessa superficie la via brevissima LM che conduce da un punto all' altro. Facciasi la *differenza in longitudine* fra i punti L e M, o sia l' angolo $LPM = \varpi$, e si aumenti l' angolo ϖ della quantità infinitesima $MPm = d\varpi$; prolungando la via brevissima LM in m, e prendendo nel *Meridiano* Pm l' arco $P\mu = PM$, talchè la latitudine del punto μ sia $= \phi$, e la latitudine del punto m sia $= \phi + d\phi$, sarà (§. 13.)

l' arco $m\mu = \frac{a(1 - e^2)\, d\phi}{\sqrt{(1 - e^2 \text{sen } \phi^2)^3}}$; e l' arco $M\mu$ descritto

col raggio $x = \frac{a \cos \phi}{\sqrt{(1 - e^2 \text{sen } \phi^2)}}$ sarà $M\mu = x\, d\varpi$

$= \frac{a\, d\varpi \cos \phi}{\sqrt{(1 - e^2 \text{sen } \phi^2)}}$. Quindi risulterà il differenziale della via brevissima LM, o sia

$$d.\,LM = Mm = \sqrt{(m\mu^2 + M\mu^2)}$$

$$= a\sqrt{\left[\frac{(1-e^2)^2\,d\phi^2}{(1-e^2\,\mathrm{sen}\,\phi^2)^3} + \frac{d\varpi^2\cos\phi^2}{1-e^2\,\mathrm{sen}\,\phi^2}\right]}$$

il cui integrale dev' essere un *minimo*.

20. Pongasi $d\varpi = p\,d\phi$, e

$$Z = \sqrt{\left[\frac{(1-e^2)^2}{(1-e^2\,\mathrm{sen}\,\phi^2)^3} + \frac{p^2\cos\phi^2}{1-e^2\,\mathrm{sen}\,\phi^2}\right]};$$

sarà il detto integrale $LM = a\int Z\,d\phi$. Ora *Eulero* nella famosa sua Opera: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*: pag. 42 e seguenti, ha dimostrato che nel caso di un *massimo* o *minimo* nella formola $\int Z\,d\phi$ si ha l'equazione $\left(\frac{dZ}{d\varpi}\right) - \left(\frac{d\,dZ}{d\phi\,dp}\right) = 0$, la quale, a cagione di $\left(\frac{dZ}{d\varpi}\right) = 0$, si riduce all' equazione $\left(\frac{dZ}{dp}\right) =$ ad una costante $= C$. Dunque avremo

$$C = \left(\frac{dZ}{dp}\right) = \frac{p\cos\phi^2}{\sqrt{\left[\frac{(1-e^2)^2}{1-e^2\,\mathrm{sen}\,\phi^2} + p^2\cos\phi^2\,(1-e^2\,\mathrm{sen}\,\phi^2)\right]}}$$

Quindi quadrando l'equazione e mettendo in luogo di p il suo valore $\frac{d\varpi}{d\phi}$, risulterà

$$\frac{C^2(1-e^2)^2\,d\phi^2}{1-e^2\,\mathrm{sen}\,\phi^2} = d\varpi^2\cos\phi^2\left(\cos\phi^2 - C^2(1-e^2\,\mathrm{sen}\,\phi^2)\right)$$

o sia, a cagione di $1 - e^2 \operatorname{sen} \varphi^2 = \frac{a^2 \cos \varphi^2}{x^2}$, sarà

$$d \varpi^2 = \frac{C^2 (1 - e^2)^2 x^4 d \varphi^2}{a^2 (x^2 - a^2 C^2) \cos \varphi^6}$$

Onde si avrà (§. 19.)

$$Mm = d. LM = a \sqrt{\left[\frac{(1 - e^2)^2 x^6 d \varphi^2}{a^6 \cos \varphi^6} + \frac{x^2 d \varpi^2}{a^2} \right]}$$

$$= \frac{(1 - e^2) x^3 d \varphi}{a \cos \varphi^3} \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{C^2}{x^2 - a^2 C^2} \right)}$$

$$= \frac{(1 - e^2) x^4 d \varphi}{a^2 \cos \varphi^3 \sqrt{(x^2 - a^2 C^2)}}$$

e l' arco $M\mu = x d \varpi = \frac{C (1 - e^2) x^3 d \varphi}{a \cos \varphi^3 \sqrt{(x^2 - a^2 C^2)}}$

Ma, posto l'angolo $PMm = \theta$, si ha $\operatorname{sen} \theta = \frac{M\mu}{Mm}$

$= \frac{a C}{x} = \frac{C \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen} \varphi^2)}}{\cos \varphi}$; sarà pertanto

$C = \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen} \varphi^2)}}$. Nel punto L la latitudine φ diventa $= \lambda$; posto dunque l'angolo $PLM = \zeta$, sarà similmente $C = \frac{\operatorname{sen} \zeta \cos \lambda}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen} \lambda^2)}}$. Quindi eguagliando fra loro i due valori di C, otterremo la prima equazione fondamentale

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi} \operatorname{sen} \zeta \sqrt{\left(\frac{1 - e^2 \operatorname{sen} \varphi^2}{1 - e^2 \operatorname{sen} \lambda^2} \right)} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Sostituiscansi nell'equazione $d.LM = \frac{(1-e^2)x^4 d\phi}{a^2 \cos\phi^3 \sqrt{(x-a^2C^2)}}$

i valori di $C = \frac{\text{sen}\,\zeta \cos\lambda}{\sqrt{(1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2)}}$ ed $x = \frac{a\cos\phi}{\sqrt{(1-e^2\,\text{sen}\,\phi^2)}}$,

si avrà

$$d.LM = \frac{a(1-e^2)\,d\phi\cos\phi\sqrt{(1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2)}}{[1-e^2\,\text{sen}\,\phi^2]^{\frac{3}{2}}\sqrt{[\cos\phi^2(1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2)-\text{sen}\,\zeta^2\cos\lambda^2(1-e^2\,\text{sen}\,\phi^2)]}} \ldots (2)$$

Gli stessi valori di C ed x sostituiti nell' equazione

$$d\varpi = \frac{C(1-e^2)x^2\,d\phi}{a\cos\phi^3\sqrt{(x^2-a^2C^2)}}$$

daranno

$$d\varpi = \frac{(1-e^2)\,d\varpi\,\text{sen}\,\zeta\cos\lambda}{\cos\phi\sqrt{(1-e^2\,\text{sen}\,\phi^2)}.\sqrt{[\cos\phi^2(1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2)-\text{sen}\,\zeta^2\cos\lambda^2(1-e^2\,\text{sen}\,\phi^2)]}} \ldots (3)$$

21. Finora abbiamo supposto $\phi > \lambda$; se fosse $\phi < \lambda$, nel qual caso sarebbe l' angolo PLM > PML o sia $\zeta > 180° - \theta$, bisognerebbe prendere i valori di d. LM e $d\varpi$ negativamente, poichè, crescendo LM e ϖ, decresce ϕ. Onde se è l'angolo $\zeta = 90°$, talchè sia $\text{sen}\,\zeta = 1$, e $\cos\phi^2(1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2) - \cos\lambda^2(1-e^2\,\text{sen}\,\phi^2)$ $= (1-e^2)(\cos\phi^2 - \cos\lambda^2)$,
le tre equazioni trovate diventeranno

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\cos\lambda}{\cos\phi}\sqrt{\left(\frac{1-e^2\,\text{sen}\,\phi^2}{1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2}\right)}$$

$$d.LM = \frac{-b\,d\phi\cos\phi}{\sqrt{(\cos\phi^2-\cos\lambda^2)}}\cdot\frac{\sqrt{(1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2)}}{[1-e^2\,\text{sen}\,\phi^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\varpi = \frac{-d\phi\cos\lambda}{\cos\phi\sqrt{(\cos\phi^2-\cos\lambda^2)}}\cdot\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{\sqrt{(1-e^2\,\text{sen}\,\phi^2)}}$$

22. Mettendo nelle tre (§. 20.) equazioni (1),(2),(3) i valori

$\delta = \frac{e^2}{2 - e^2}$; $c = b(1 + \delta)\sqrt{(1 - \delta)}$, talchè sia $e^2 = \frac{2\delta}{1 + \delta}$;

$a = \frac{c}{(1 - \delta)\sqrt{(1 + \delta)}}$, esse diventeranno l' equazioni trovate da *Eulero* (*a*). E se nell' equazioni (§. 21.) pel caso di $\zeta = 90^\circ$ si fa $\alpha = \frac{a - b}{b}$, cosicchè abbiasi

$e^2 = \frac{2\alpha + \alpha^2}{(1 + \alpha)^2}$; $b = \frac{a}{1 + \alpha}$; facendo inoltre $a = 1$, e negligentando α^2, si otterranno l' equazioni date da *Clairaut* (*b*). Finalmente se si prende $\Delta^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$, talchè abbiasi

$e^2 = \frac{\Delta^2}{1 + \Delta^2}$ le nostre equazioni (§. 20.) risulteranno

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\zeta\cos\lambda}{\cos\varphi}\sqrt{\left(\frac{1 + \Delta^2\cos\varphi^2}{1 + \Delta^2\cos\lambda^2}\right)}$$

$$d.LM = \frac{b\,d\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi^2 - \text{sen}\,\zeta^2\cos\lambda^2)}} \cdot \frac{(1 + \Delta^2)\sqrt{(1 + \Delta^2\cos\lambda^2)}}{[1 + \Delta^2\cos\varphi^2]^{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta^2\cos\varphi^2\cos\zeta^2\cos\lambda^2}{\cos\varphi^2 - \text{sen}\,\zeta^2\cos\lambda^2}\right)}}$$

$$d\varpi = \frac{d\varphi\,\text{sen}\,\zeta\cos\lambda}{\sqrt{(\cos\varphi^2 - \text{sen}\,\zeta^2\cos\lambda^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + \Delta^2\cos\varphi^2)} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta^2\cos\varphi^2\cos\zeta^2\cos\lambda^2}{\cos\varphi^2 - \text{sen}\,\zeta^2\cos\lambda^2}\right)}}$$

(*a*) Mémoires de l' Acad. R. de Berlin. Année 1753. pag. 273.
(*b*) Mémoires de l' Acad. R. des Sciences de Paris. Années 1733, 1739.

23. Prima d'integrare le due ultime equazioni, converrà ridurle ad una forma più semplice per mezzo delle seguenti sostituzioni. Facciasi dunque

$$\text{sen}\,p = \text{sen}\,\zeta \cos\lambda$$

ed in seguito pongasi

$$\text{sen}\,\upsilon = \frac{\text{sen}\,\phi}{\cos p}$$

cosicchè risulti

$$\cos.\phi^2 - \text{sen}\,p^2 = \cos p^2 \cos\upsilon^2 ; \quad \frac{d\phi \cos\phi}{\sqrt{(\cos\phi^2 - \text{sen}\,p^2)}} = d\upsilon.$$

Sia ancora

$$P = \frac{L\,M}{b}$$

avremo (§. 22.)

$$dP = \frac{(1 + \Delta^2)\,d\upsilon \sqrt{(1 + \Delta^2 \cos\lambda^2)}}{[1 + \Delta^2(\text{sen}\,p^2 + \cos p^2 \cos\upsilon^2)]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left[1 + \Delta^2 \cos\zeta^2 \cos\lambda^2 \left(1 + \frac{\text{tang}\,p^2}{\cos\upsilon^2}\right)\right]}}$$

$$= \frac{(1 + \Delta^2)\sqrt{(1 + \Delta^2 \cos\lambda^2)}}{[1 + \Delta^2 \text{sen}\,p^2]^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + \Delta^2 \cos\zeta^2 \cos\lambda^2)}} \cdot \frac{d\upsilon}{\left[1 + \frac{\Delta^2 \cos p^2}{1 + \Delta^2 \text{sen}\,p^2} \cos\upsilon^2\right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left[1 + \frac{\Delta^2 \cos\zeta^2 \cos\lambda^2 \text{tang}\,p^2}{1 + \Delta^2 \cos\zeta^2 \cos\lambda^2} \cdot \frac{1}{\cos\upsilon^2}\right]}}$$

Onde facendo ancora per analogia

$$\text{sen}\,\upsilon' = \frac{\text{sen}\,\lambda}{\cos p}$$

cosicchè sia

$$\cos\zeta^2 \cos\lambda^2 = \cos\lambda^2 - \text{sen}\,p^2 = \cos p^2 \cos\upsilon'^2.$$

Ed in oltre mettendo

$$D^2 = \frac{\Delta^2 \cos p^2}{1 + \Delta^2 \operatorname{sen} p^2} = \frac{e^2 \cos p^2}{1 - e^2 \cos p^2}$$

$$D'^2 = \frac{\Delta^2 \operatorname{sen} p^2 \cos \upsilon'^2}{1 + \Delta^2 \cos p^2 \cos \upsilon'^2} = \frac{e^2 \operatorname{sen} p^2 \cos \upsilon'^2}{1 - e^2 (1 - \cos p^2 \cos \upsilon'^2)}$$

di maniera che abbiasi

$$\frac{(1 + \Delta^2)\sqrt{1 + \Delta^2 \cos \lambda^2)}}{[1 + \Delta^2 \operatorname{sen} p^2]^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + \Delta^2 \cos \zeta^2 \cos \lambda^2)}} = (1 + D^2)\sqrt{(1 - D^2 D'^2)},$$

otterremo

$$d\,P = \frac{(1 + D^2)\, d\,\upsilon \sqrt{(1 - D^2 D'^2)}}{[1 + D^2 \cos \upsilon^2]^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{D'^2}{\cos \upsilon^2}\right)}} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

sostituendo le stesse quantità p, υ, υ', D, D′ nell' ultima equazione (§. 22.) si avrà

$$d\,\varpi = \frac{D\,D'}{\Delta^2 \cos p \cos \upsilon'} \cdot \frac{d\,\upsilon}{(\operatorname{sen} p^2 + \cos p^2 \cos \upsilon^2)\sqrt{\left[(1 + D^2 \cos \upsilon^2)\left(1 + \frac{D'^2}{\cos \upsilon^2}\right)\right]}} \cdots\cdots (5)$$

24. L' integrazione delle formole (4), e (5) per mezzo delle serie non incontra più alcuna difficoltà. In fatti facendo per brevità

$$M = (1 + D^2)\sqrt{(1 - D^2 D'^2)}$$

$$G = M\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} D^2 D'^2 + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{3.5}{2.4} D^4 D'^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{3.5.7}{2.4.6} D^6 D'^6 + \text{ec.}\right]$$

$$G' = \frac{1}{2} D^2 M\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} D^2 D'^2 + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{5.7}{4.6} D^4 D'^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{5.7.9}{4.6.8} D^6 D'^6 + \text{ec.}\right]$$

$$G'' = \frac{1.3}{2.4} D^4 M\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} D^2 D'^2 + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{7.9}{6.8} D^4 D'^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{7.9.11}{6.8.10} D^6 D'^6 + \text{ec.}\right]$$

$$G'''=\frac{1.3.5}{2.4.6}D^6M\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8}D^2D'^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{9.11}{8.10}D^4D'^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{9.11.13}{8.10.12}D^6D'^6+\text{ec.}\right].$$

ec.

Similmente

$$H'=\frac{1}{2}D'^2M\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}D^2D'^2+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{3.5}{4.6}D^4D'^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{3.5.7}{4.6.8}D^6D'^6+\text{ ec.}\right]$$

$$H''=\frac{1}{4}D'^4M\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}D^2D'^2+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{5.7}{6.8}D^4D'^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{5.7.9}{6.8.10}D^6D'^6+\text{ ec.}\right]$$

$$H'''=\frac{1}{6}D'^6M\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{8}D^2D'^2+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{7.9}{8.10}D^4D'^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{7.9.11}{8.10.12}D^6D'^6+\text{ ec}\right]$$

ec.

risulterà la formola (4)

$$dP=d\upsilon\left\{\begin{array}{l} G-3\,G'\cos\upsilon^2+5\,G''\cos\upsilon^4-7\,G'''\cos\upsilon^6+\text{ ec.}\\ -\dfrac{H'}{\cos\upsilon^2}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{H''}{\cos\upsilon^4}-\dfrac{3.5}{2.4}\cdot\dfrac{H'''}{\cos\upsilon^6}+\text{ ec.}\end{array}\right\}$$

ma abbiamo già esposto sopra (§. 17.) l' integrale $\int d\upsilon.\cos\upsilon^{2n}$; e si ha in oltre generalmente

$$\int\frac{d\upsilon}{\cos\upsilon^{2n}}=\frac{\text{tang}\,\upsilon}{2n-1}\left[\frac{1}{\cos\upsilon^{2n-2}}+\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{1}{\cos\upsilon^{2n-4}}+\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-4}{2n-5}\cdot\frac{1}{\cos\upsilon^{2n-6}}\right.$$
$$\left.+\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-4}{2n-5}\cdot\frac{2n-6}{2n-7}\cdot\frac{1}{\cos\upsilon^{2n-8}}+\text{ ec.}\right]$$

Dunque supponendo

$$g=G-\frac{3}{2}G'+\frac{3.5}{2.4}G''-\frac{3.5.7}{2.4.6}G'''+\text{ ec.}$$

$$g'=G-g$$

$$g''=G'-\frac{2}{3}g'$$

$$g''' = G'' - \frac{4}{5} g''$$

$$g^{\text{IV}} = G''' - \frac{6}{7} g'''$$

ec.

e di più

$$h' = H' - H'' + H''' - H^{\text{IV}} + \text{ec.}$$

$$h'' = H' - h'$$

$$h''' = H'' - h''$$

$$h^{\text{IV}} = H''' - h'''$$

ec.

avremo

$$P + \text{costante} = g\upsilon - g' \operatorname{sen}\upsilon \cos\upsilon + g'' \operatorname{sen}\upsilon \cos\upsilon^3 - g''' \operatorname{sen}\upsilon \cos\upsilon^5 + \text{ec.}$$
$$- \operatorname{tang}\upsilon \left[h' - \frac{1}{2} \cdot \frac{h''}{\cos\upsilon^2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{h'''}{\cos\upsilon^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{h^{\text{IV}}}{\cos\upsilon^5} + \text{ec.} \right]$$

Facciasi come sopra (§. 17.)

$$A = \frac{g'}{2} - \frac{2}{1} \cdot \frac{g''}{2^3} + \frac{2.5}{1.2} \cdot \frac{g'''}{2^5} - \frac{2.6.7}{1.2.3} \cdot \frac{g^{\text{IV}}}{2^7} + \text{ec.}$$

$$B = \frac{g''}{2^3} - \frac{4}{1} \cdot \frac{g'''}{2^5} + \frac{4.7}{1.2} \cdot \frac{g^{\text{IV}}}{2^7} - \frac{4.8.9}{1.2.3} \cdot \frac{g^{\text{V}}}{2^9} + \text{ec.}$$

$$C = \frac{g'''}{2^5} - \frac{6}{1} \cdot \frac{g^{\text{IV}}}{2^7} + \frac{6.9}{1.2} \cdot \frac{g^{\text{V}}}{2^9} - \frac{6.10.11}{1.2.3} \cdot \frac{g^{\text{VI}}}{2^{11}} + \text{ec.}$$

ec.

e si determini la *costante* colla condizione, che nel punto L (Figura 2ª.) dev'essere $P = o$; ed è per conseguenza $\phi = \lambda$, o sia $\upsilon = \upsilon'$. Si avrà finalmente

$$P = g(\upsilon - \upsilon') - A(\text{sen}\,2\upsilon - \text{sen}\,2\upsilon') + B(\text{sen}\,4\upsilon - \text{sen}\,4\upsilon') - C(\text{sen}\,6\upsilon - \text{sen}\,6\upsilon') + \text{ec.}$$

$$- h'(t\,\upsilon - t\,\upsilon') + \frac{1}{2}h''\left(\frac{t\,\upsilon}{\cos\upsilon^2} - \frac{t\,\upsilon'}{\cos\upsilon'^2}\right) - \frac{1.3}{2.4}h'''\left(\frac{t\,\upsilon}{\cos\upsilon^4} - \frac{t\,\upsilon'}{\cos\upsilon'^4}\right)$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}h^{\prime v}\left(\frac{t\,\upsilon}{\cos\upsilon^6} - \frac{t\,\upsilon'}{\cos\upsilon'^6}\right) - \text{ec.}\ldots(6)$$

25. L' altra formola (§ 23) esprimente il valore di $d\varpi$ s' integrerà egualmente riducendo in serie la quantità $\dfrac{1}{\sqrt{(1 + D^2\cos\upsilon^2)\left(1 + \dfrac{D'^2}{\cos\upsilon^2}\right)}}$.

Onde facendo per brevità

$$N = \frac{D\,D'}{\Delta^2 \text{sen}\,p \cos p \cos\upsilon'} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \Delta^2\text{sen}\,p^2)(1 + \Delta^2\cos p^2 \cos\upsilon'^2)}}$$

$$= \sqrt{(1 - D^2\,\text{tang}\,p^2)(1 - D'^2\cot p^2)}$$

$$F = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . D^2D'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . D^4D'^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . D^6D'^6 + \text{ec.}$$

$$F' = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}D^2D'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \frac{5}{6}D^4D'^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \frac{7}{8}D^6D'^6 + \text{ec.}$$

$$F'' = \frac{1.3}{2.4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{3.5}{4.6}D^2D'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \frac{5.7}{6.8}D^4D'^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \frac{7.9}{8.10}D^6D'^6 + \text{ec.}$$

$$F''' = \frac{1.3.5}{2.4.6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{3.5.7}{4.6.8}D^2D'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \frac{5.7.9}{6.8.10}D^4D'^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \frac{7.9.11}{8.10.12}D^6D'^6 + \text{ec.}$$

ec.

risulterà

$$d\varpi = \frac{N\,d\upsilon\,\text{sen}\,p}{\text{sen}\,p^2 + \cos p^2\cos\upsilon^2}\left\{\begin{array}{l} F - F'D^2\cos\upsilon^2 + F''D^4\cos\upsilon^4 - F'''D^6\cos\upsilon^6 + \text{ec.} \\ - \dfrac{F'D'^2}{\cos\upsilon^2} + \dfrac{F''D'^4}{\cos\upsilon^4} - \dfrac{F'''D'^6}{\cos\upsilon^6} + \text{ec.} \end{array}\right\}$$

Ma è generalmente

$$\frac{\cos \upsilon^{2n}}{\text{sen}\, p^2 + \cos p^2 \cos \upsilon^2}$$

$$= \frac{1}{\cos p^2}\left[\cos \upsilon^{2n-2} - \text{tang}\, p^2 \cos \upsilon^{2n-4} + \text{tang}\, p^4 \cos \upsilon^{2n-6} - \ldots \pm \text{tang}\, p^{2n-2}\right]$$

$$\mp \frac{\text{tang}\, p^{2n}}{\text{sen}\, p^2 + \cos p^2 \cos \upsilon^2}\;,$$

$$\frac{\cos \upsilon^{-2n}}{\text{sen}\, p^2 + \cos p^2 \cos \upsilon^2}$$

$$= \frac{1}{\text{sen}\, p^2}\left[\frac{1}{\cos \upsilon^{2n}} - \frac{\cot p^2}{\cos \upsilon^{2n-2}} + \frac{\cot p^4}{\cos \upsilon^{2n-4}} - \ldots\ldots \pm \frac{\cot p^{2n-2}}{\cos \upsilon^2}\right]$$

$$\mp \frac{\cot p^{2n}}{\text{sen}\, p^2 + \cos p^2 \cos \upsilon^2}$$

Nelle quali espressioni ha luogo il segno superiore quando n è numero dispari, e l' inferiore quando n è numero pari. Avremo quindi

$$d\varpi = \frac{N\, d\upsilon\, \text{sen}\, p}{\text{sen}\, p^2 + \cos p^2 \cos \upsilon^2}\Big[F + F'(D^2\, \text{tang}\, p^2 + D'^2 \cot p^2)$$

$$+ F''(D^4\, \text{tang}\, p^4 + D'^4 \cot p^4) + F'''(D^6\, \text{tang}\, p^6 + D'^6 \cot p^6) + \text{ec.}\Big]$$

$$- \frac{N}{\text{sen}\, p}\,.\, d\upsilon\left[F' D^2\, \text{tang}\, p^2 + F'' D^4\, \text{tang}\, p^4 + F''' D^6\, \text{tang}\, p^6 + \text{ec.}\ldots\right]$$

$$+ \frac{N}{\text{sen}\, p}\,.\, d\upsilon \cos \upsilon^2 \left[F'' D^4\, \text{tang}\, p^2 + F''' D^6\, \text{tang}\, p^4 + F^{IV} D^8\, \text{tang}\, p^6 + \text{ec.}\ldots\right]$$

$$- \frac{N}{\text{sen}\, p}\,.\, d\upsilon \cos \upsilon^4 \left[F''' D^6\, \text{tang}\, p^2 + F^{IV} D^8\, \text{tang}\, p^4 + F^{V} D^{10}\, \text{tang}\, p +^6 \text{ec.}\right]$$

$+$ ec.

$$-\frac{N}{\text{sen}\, p}\cdot\frac{d\upsilon}{\cos\upsilon^2}\left[F' D'^2 + F'' D'^4 \cot p^2 + F''' D'^6 \cot p^4 + \text{ec.}\right]$$

$$+\frac{N}{\text{sen}\, p}\cdot\frac{d\upsilon}{\cos\upsilon^5}\left[F'' D'^4 + F''' D'^6 \cot p^2 + F^{\text{IV}} D'^8 \cot p^4 + \text{ec.}\right]$$

$$-\frac{N}{\text{sen}\, p}\cdot\frac{d\upsilon}{\cos\upsilon^6}\left[F''' D'^6 + F^{\text{IV}} D'^8 \cot p^2 + F^{\text{V}} D'^{10} \cot p^4 + \text{ec.}\right]$$

$+$ ec.

Ed è facile da vedere che si ha

$$N\left[F + F'(D^2\, t\, p^2 + D'^2 \cot p^2) + F''(D^4\, t\, p^4 + D'^4 \cot p^4) + \text{ec.}\right]$$
$$= \frac{N}{\sqrt{(1 - D^2 \,\text{tang}\, p^2)(1 - D'^2 \cot p^2)}} = 1$$

Abbiamo già veduto sopra (§§ 17, 24) la forma degl' integrali $\int d\upsilon \cos\upsilon^{2n}$, $\int \frac{d\upsilon}{\cos\upsilon^{2n}}$. In oltre l' integrale di

$\frac{d\upsilon\, \text{sen}\, p}{\text{sen}\, p^2 + \cos p^2 \cos\upsilon^2}$, o sia di $\frac{d\upsilon\, \text{sen}\, p}{1 - \cos p^2\, \text{sen}\, \upsilon^3}$ è eguale all' angolo, la cui tangente $= \text{sen}\, p\, \text{tang}\, \upsilon$; dunque facendo quest' angolo $= z$, cosicchè sia $\text{tang}\, z = \text{sen}\, p\, \text{tang}\, \upsilon$, e supponendo per brevità

$$f = N\frac{\text{tang}\, p}{\cos p}\Big[F'D^2 - F''D^4\left(\tfrac{1}{2} - t\,p^2\right) + F'''D^6\left(\tfrac{1.3}{2.4} - \tfrac{1}{2}\, t\,p^2 + t\,p^4\right)$$
$$- F^{\text{IV}} D^8\left(\tfrac{1.3.5}{2.4.6} - \tfrac{1.3}{2.4}\, t\,p^2 + \tfrac{1}{2}\, t\,p^4 - t\,p^6\right) + \text{ec.}\Big]$$

$$f' = \frac{N}{2}\,\frac{\text{tang}\, p}{\cos p}\Big[F''D^4 - F'''D^6\left(\tfrac{3}{4} - t\,p^2\right) + F^{\text{IV}}D^8\left(\tfrac{3.5}{4.6} - \tfrac{3}{4}\, t\,p^2 + t\,p^4\right)$$
$$- F^{\text{V}} D^{10}\left(\tfrac{3.5.7}{4.6.8} - \tfrac{3.5}{4.6}\, t\,p^2 + \tfrac{3}{4}\, t\,p^4 - t\,p^6\right) + \text{ec.}\Big]$$

$$f''=\frac{N}{4}\cdot\frac{\tang p}{\cos p}\Big[F'''D^6-F^{IV}D^8\left(\frac{5}{6}-t\,p^2\right)+F^{V}D^{10}\left(\frac{5.7}{6.8}-\frac{5}{6}t\,p^2+t\,p^4\right)$$

$$-F^{VI}D^{12}\left(\frac{5.7.9}{6.8.10}-\frac{5.7}{6.8}t\,p^2+\frac{5}{6}t\,p^4-t\,p^6\right)+\text{ec.}\Big]$$

$$f'''=\frac{N}{6}\cdot\frac{\tang p}{\cos p}\Big[F^{IV}D^8-F^{V}D^{10}\left(\frac{7}{8}-t\,p^2\right)+\text{ec.}$$

ec.

$$c'=\frac{N}{\operatorname{sen} p}\Big[F'D'^2-F''D'^4\left(\frac{2}{3}-\cot p^2\right)+F'''D'^6\left(\frac{2.4}{3.5}-\frac{2}{3}\cot p^2+\cot p^4\right)-\text{ec.}\Big]$$

$$c''=\frac{1}{3}\cdot\frac{N}{\operatorname{sen} p}\Big[F''D'^4-F'''D'^6\left(\frac{4}{5}-\cot p^2\right)+F^{IV}D'^8\left(\frac{4.6}{5.7}-\frac{4}{5}\cot p^2+\cot p^4\right)-\text{ec.}\Big]$$

$$c'''=\frac{1}{5}\cdot\frac{N}{\operatorname{sen} p}\Big[F'''D'^6-F^{IV}D'^8\left(\frac{6}{7}-\cot p^2\right)+F^{V}D'^{10}\left(\frac{6.8}{7.9}-\frac{6}{7}\cot p^2+\cot p^4\right)-\text{ec.}\Big]$$

ec.

avremo

$$x+\text{costante}=z-f\upsilon+f'\operatorname{sen}\upsilon\cos\upsilon-f''\operatorname{sen}\upsilon\cos\upsilon^3+f'''\operatorname{sen}\upsilon\cos\upsilon^5-\text{ec.}$$

$$-\tang\upsilon\left[c'-\frac{c''}{\cos\upsilon^2}+\frac{c'''}{\cos\upsilon^4}+\text{ec.}\right]$$

Pongasi ora (§ 17)

$$A'=\frac{f'}{2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{f''}{2^3}+\frac{2.5}{1.2}\cdot\frac{f'''}{2^5}-\frac{2.6.7}{1.2.3}\cdot\frac{f^{IV}}{2^7}+\text{ec.}$$

$$B'=\frac{f''}{2^3}-\frac{4}{1}\cdot\frac{f'''}{2^5}+\frac{4.7}{1.2}\cdot\frac{f^{IV}}{2^7}-\frac{4.8.9}{1.2.3}\cdot\frac{f^{V}}{2^9}+\text{ec.}$$

$$C'=\frac{f'''}{2^5}-\frac{6}{1}\cdot\frac{f^{IV}}{2^7}+\frac{6.9}{1.2}\cdot\frac{f^{V}}{2^9}-\frac{6.10.11}{1.2.3}\cdot\frac{f^{VI}}{2^{11}}+\text{ec.}$$

ec.

e si determini come sopra (§ 24) la costante per mezzo della condizione che nel punto L (Figura 2ª.) sia $\varpi = 0$, e quindi $\phi = \lambda$ o sia $\upsilon = \upsilon'$. Posto in oltre

$$\text{tang}\, z' = \text{sen}\, p\, \text{tang}\, \upsilon'$$

avremo finalmente

$$\varpi = z - z' - (\upsilon - \upsilon')f + A'(\text{sen}\,2\upsilon - \text{sen}\,2\upsilon') - B'(\text{sen}\,4\upsilon - \text{sen}\,4\upsilon')$$
$$+ C'(\text{sen}\,6\upsilon - \text{sen}\,6\upsilon') - \text{ec.}$$
$$- c'(t\upsilon - t\upsilon') + c''\left(\frac{t\upsilon}{\cos\upsilon^2} - \frac{t\upsilon'}{\cos\upsilon'^2}\right) - C'''\left(\frac{t\upsilon}{\cos\upsilon^4} - \frac{t\upsilon'}{\cos\upsilon'^4}\right) + \text{ec.} \ldots (7)$$

26. Dati per tanto nel triangolo sferoidico elittico LMP (Figura 2ª.) i tre elementi λ, ϕ, ζ; cioè la latitudine λ del punto L, la latitudine ϕ del punto M, e l' azimut $\zeta = PLM$, si troverà, per mezzo della formola (6), (§ 24) il valore di $P = \frac{LM}{b}$; onde sarà nota la via brevissima LM, che conduce dal punto L al punto M: e per mezzo della formola (7) si otterrà l' angolo $LPM = \varpi$, cioè la differenza in longitudine fra gli stessi due punti. Il terzo angolo, o sia l' azimut $PML = 180°. - \theta$ si ricaverà dalla formola (1) sopra (§ 20) trovata. L' avvertenza data sopra (§ 18) ha luogo ancora nelle formole (6), (7). Onde se gli angoli $\upsilon - \upsilon'$; $z - z'$; ϖ si vogliono esprimere in gradi, o pure in minuti secondi, il termine $g(\upsilon - \upsilon')$ della formola (6), ed i termini ϖ, $(z - z')$, $(\upsilon - \upsilon')f$ della formola (7) si dovranno moltiplicare per $\frac{\pi}{180}$, o pure per $\frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{60^2}$.

27. Qualora si vogliano trascurare, come insensibili, i termini moltiplicati nella sesta, e nelle più alte potenze dell' eccentricità, la formola (6) darà $\frac{LM}{b} =$

$$P = \left[1 + \frac{1}{2^2}\Delta^2 \cos p^2 - \frac{1.3}{2^2.4^2}\Delta^4\left(\cos p^4 + \frac{4^2}{3}\operatorname{sen} p^2 \operatorname{sen} \lambda^2\right)\right](\upsilon - \upsilon')$$

$$- \left[\frac{1.3}{2.4}\Delta^2 \cos p^2 - \frac{1.3}{2.4^2}\Delta^4 \cos p^2 (\cos p^2 + 4 \operatorname{sen} p^2)\right](\operatorname{sen} 2\upsilon - \operatorname{sen} 2\upsilon')$$

$$+ \frac{3.5}{2^2.4^3}\Delta^4 \cos p^4 (\operatorname{sen} 4\upsilon - \operatorname{sen} 4\upsilon')$$

$$- \left[\frac{1}{2}\Delta^2 \operatorname{sen} p^2 - \frac{1}{4}\Delta^4 \operatorname{sen} p^2 (\operatorname{sen} p^2 - (1 + \cos p^2)\operatorname{sen} \upsilon'^2)\right] \cos \upsilon' (\operatorname{tang} \upsilon \cos \upsilon' - \operatorname{sen} \upsilon')$$

$$+ \frac{1}{2.4}\Delta^4 \operatorname{sen} p^4 \cos \upsilon' \left(\frac{\operatorname{tang} \upsilon}{\cos \upsilon^2} . \cos \upsilon'^3 - \operatorname{sen} \upsilon'\right)$$

ovvero

$$P = \left[1 + \frac{1}{2^2} e^2 \cos p^2 + \frac{1}{2^2.4^2} e^4 \cos p^2 (13 \cos p^2 + 16 \operatorname{sen} p^2 \cos \upsilon'^2)\right](\upsilon - \upsilon')$$

$$- \left[\frac{1.3}{2.4} e^2 \cos p^2 + \frac{1.3^2}{2.4^2} e^4 \cos p^4\right](\operatorname{sen} 2\upsilon - \operatorname{sen} 2\upsilon')$$

$$+ \frac{3.5}{2^2.4^3} e^4 \cos p^4 (\operatorname{sen} 4\upsilon - \operatorname{sen} 4\upsilon')$$

$$- \left[\frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen} p^2 + \frac{1}{4} e^4 \operatorname{sen} p^2 (1 + \cos p^2)(1 + \operatorname{sen} \upsilon'^2)\right] \cos \upsilon' (\operatorname{tang} \upsilon \cos \upsilon' - \operatorname{sen} \upsilon')$$

$$+ \frac{1}{2.4} e^4 \operatorname{sen} p^4 \cos \upsilon' \left(\frac{\operatorname{tang} \upsilon}{\cos \upsilon^2} . \cos \upsilon'^3 - \operatorname{sen} \upsilon'\right)$$

Si avrà poi dalla formola (7) la differenza in longitudine

$$\varpi = z - z' - \left[\frac{1}{2}\Delta^2 \operatorname{sen} p - \frac{1.3}{2^2.4}\Delta^4 \operatorname{sen} p(1 + \operatorname{sen} p^2 + \frac{4}{3}\cos p^2 \cos \upsilon'^2)\right](\upsilon - \upsilon')$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2.4^2}\Delta^4 \operatorname{sen} p \cos p^2 (\operatorname{sen} 2\upsilon - \operatorname{sen} 2\upsilon')$$

$$- \left[\frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{2.4}\Delta^4 (2 \operatorname{sen} p^2 + (2 + \cos p^2)\cos \upsilon'^2)\right] \operatorname{sen} p \cos \upsilon' (\operatorname{tang} \upsilon \cos \upsilon' - \operatorname{sen} \upsilon')$$

$$+ \frac{1}{2.4}\Delta^4 \operatorname{sen} p \cos \upsilon' \left(\frac{\operatorname{tang} \upsilon}{\cos \upsilon^2} \cos \upsilon'^3 - \operatorname{sen} \upsilon'\right)$$

o pure

$$\varpi = z - z' - \left[\frac{1}{2}e^2 \operatorname{sen} p + \frac{1}{4^2} e^4 \operatorname{sen} p\ (2 + 3\cos p^2 - 4 \cos p^2 \cos \upsilon'^2)\right](\upsilon - \upsilon')$$

$$+ \frac{1.3}{2.4^2} e^4 \operatorname{sen} p \cos p^2\ (\operatorname{sen} 2\upsilon - \operatorname{sen} 2\upsilon')$$

$$- \left[\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2.4} e^4 (\cos p^2 + (2 + \cos p^2) \operatorname{sen} \upsilon'^2)\right] \operatorname{sen} p \cos \upsilon' (\operatorname{tang} \upsilon \cos \upsilon' - \operatorname{sen} \upsilon')$$

$$+ \frac{1}{2.4} e^4 \operatorname{sen} p \cos \upsilon' \left(\frac{\operatorname{tang} \upsilon}{\cos \upsilon^2} . \cos \upsilon'^3 - \operatorname{sen} \upsilon'\right)$$

Nelle quali espressioni si ha

$\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} \zeta \cos \lambda$; $\operatorname{sen} \upsilon = \dfrac{\operatorname{sen} \phi}{\cos p}$; $\operatorname{sen} \upsilon' = \dfrac{\operatorname{sen} \lambda}{\cos p}$; e

$\operatorname{tang} z = \operatorname{sen} p \operatorname{tang} \upsilon$; $\operatorname{tang} z' = \operatorname{sen} p \operatorname{tang} \upsilon'$.

28. Quando la via brevissima è perpendicolare al Meridiano in uno de' due dati punti, o sia quando l' azimut $\zeta = 90°$, la formola (6) diventa più semplice. In fatti essendo in questo caso

$\operatorname{sen} p = \cos \lambda$; $\cos p = \operatorname{sen} \lambda$; $\operatorname{sen} \upsilon' = 1$; $\cos \upsilon' = 0$; $\upsilon' = 90°$;

$$D^2 = \frac{\Delta^2 \operatorname{sen} \lambda^2}{1 + \Delta^2 \cos\lambda^2} = \frac{e^2 \operatorname{sen} \lambda^2}{1 - e^2 \operatorname{sen} \lambda^2}\,;\ D'^2 = 0;\ h' = 0;\ h'' = 0;\ h''' = 0;\ \text{ec.}$$

si avrà (§. 24.)

$$M = 1 + D^2 = \frac{1 + \Delta^2}{1 + \Delta^2 \cos \lambda^2} = \frac{1}{1 - e^2 \operatorname{sen} \lambda^2}$$

$$G = M;\ G' = \frac{1}{2} D^2 M;\ G'' = \frac{1.3}{2.4} D^4 M;\ G''' = \frac{1.3.5}{2.4.6} D^6 M;\ \text{ec.}$$

Quindi sarà

$$g = 1 + \frac{1}{2^2} D^2 - \frac{1.3}{2^2.4^2} D^4 + \frac{1.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} D^6 - \frac{1.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2} D^8 + \text{ec.}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} \Delta^2 \operatorname{sen} \lambda^2$$

$$- \frac{1.3}{2^2.4^2} \Delta^4 \operatorname{sen} \lambda^2 \left(\operatorname{sen} \lambda^2 + \frac{4^2}{3} \cos \lambda^2\right)$$

$$+ \frac{1.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} \Delta^6 \operatorname{sen} \lambda^2 \left(\operatorname{sen} \lambda^4 + 2\,\frac{6^2}{5.3} \operatorname{sen} \lambda^2 \cos \lambda^2 + \frac{6^2.4^2}{5.3^2} \cos \lambda^4\right)$$

$$- \frac{1.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2} \Delta^8 \operatorname{sen} \lambda^2 \left(\operatorname{sen} \lambda^6 + 3\,\frac{8^2}{7.5} \operatorname{sen} \lambda^4 \cos \lambda^2 + 3\,\frac{8^2.6^2}{7.5^2.3} \operatorname{sen} \lambda^2 \cos \lambda^4 \right.$$

$$\left. + \frac{8^2.6^2.4^2}{7.5^2.3^2} \cos \lambda^6\right)$$

$$+ \text{ec.}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} e^2 \operatorname{sen} \lambda^2 + \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{3}{4^2}\right) e^4 \operatorname{sen} \lambda^4$$

$$+ \frac{1}{2^2}\left(1 - 2\,\frac{3}{4^2} + \frac{3^2.5}{4^2.6^2}\right) e^6 \operatorname{sen.} \lambda^6$$

$$+\frac{1}{2^2}\left(1-3\frac{3}{4^2}+3\frac{3^2.5}{4^2.6^2}-\frac{3^2.5^2.7}{4^2.6^2.8^2}\right)e^8\text{sen}\,\lambda^8$$

$+$ ec.

$$g'=1+D^2-g=\frac{1}{1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2}-g$$

$$g''=\frac{1}{2}D^2(1+D^2)-\frac{2}{3}g'=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2\,\text{sen}\,\lambda^2}{(1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2)^2}-\frac{2}{3}g'$$

$$g'''=\frac{1.3}{2.4}D^4(1+D^2)-\frac{4}{5}g''=\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{e^4\,\text{sen}\,\lambda^4}{(1-e^2\,\text{sen}\,\lambda^2)^3}-\frac{4}{5}g''$$

$$g^{\text{IV}}=\frac{1.3.5}{2.4.6}D^6(1+D^2)-\frac{6}{7}g'''=\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{e^6\,\text{sen}\,\lambda^6}{(1-e^2\text{sen}\,\lambda^2)^4}-\frac{6}{7}g'''$$

ec.

Ritenendo per tanto i coefficienti A, B, C, ec. formati come sopra (§ 24) da questi nuovi valori di g', g'', g''', ec; la formola (6) presa negativamente per la ragione addotta (§ 21) darà

$$P=g(90°-v)+A\,\text{sen}\,2v-B\text{sen}\,4v+C\,\text{sen}\,6v-\text{ec.}\ldots\quad(8)$$

Nella quale espressione è sen $v=\frac{\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\lambda}$.

29. Lo stesso valore di P si poteva dedurre immediatamente dalla formola differenziale (4) (§ 23): poichè, essendo $D'=0$, essa diventa $dP=\frac{(1+D^2)\,dv}{(1+D^2\cos v^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Ora questo differenziale è in tutto simile a $\frac{(1+\Delta^2)d\phi}{(1+\Delta^2\cos\phi^2)^{\frac{3}{2}}}$

integrato precedentemente (§. 17). Dunque mettendo

nell' integrale di quest' ultima formola D^2 in vece di Δ^2, o sia $e^2 \operatorname{sen} \lambda^2$ in vece di e^2, ed υ in vece di ϕ, si avrà lo stesso valore di P ora trovato, purchè si prenda negativamente (§ 21), e si determini la costante colla condizione che nel punto L (Figura 2) sia

$P = 0$, e $\upsilon = \upsilon' = 90^\circ$.

30. Nella medesima ipotesi di $\zeta = 90^\circ$ anche la differenza in longitudine $= \varpi$ espressa colla formola (7) si rende più semplice; poichè, essendo

$\upsilon' = 90^\circ$; $D' = 0$; $c' = 0$; $c'' = 0$; $c''' = 0$; ec. e

$$D^2 = \frac{\Delta^2 \operatorname{sen} \lambda^2}{1 + \Delta^2 \cos \lambda^2} = \frac{e^2 \operatorname{sen} \lambda^2}{1 - e^2 \operatorname{sen} \lambda^2}, \text{ si ha}$$

$$N = \sqrt{(1 - D^2 \cot \lambda^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \Delta^2 \cos \lambda^2)}} = \sqrt{\left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \operatorname{sen} \lambda^2}\right)}$$

$$F = 1;\ F' = \frac{1}{2};\ F'' = \frac{1.3}{2.4};\ F''' = \frac{1.3.5}{2.4.6};\ \text{ec.}$$

Onde risulta

$$f = \frac{\cos \lambda}{\operatorname{sen} \lambda^2} \sqrt{(1 - D^2 \cot \lambda^2)} \left[\frac{1}{2} D^2 - \frac{1.3}{2.4} D^4 \left(\frac{1}{2} - \cot \lambda^2 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} D^6 \left(\frac{1.3}{2.4} - \frac{1}{2} \cot \lambda^2 + \cot \lambda^4 \right) - \text{ec} \right]$$

$$= \cos \lambda \left[\frac{1}{2} \Delta^2 - \frac{1.3}{2.4} \Delta^4 \left(\cos \lambda^2 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \lambda^2 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} \Delta^6 \left(\cos \lambda^4 + 2 \frac{1}{2} \operatorname{sen} \lambda^2 \cos \lambda + \frac{1.3}{2.4} \operatorname{sen} \lambda^4 \right) - \text{ec.} \right]$$

Quindi facendo per brevità

$$K = 1 - \frac{1}{(1+\Delta^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad = 1 - \sqrt{(1-e^2)}$$

$$K' = K - \frac{\frac{1}{2}\Delta^2}{(1+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad = K - \frac{1}{2} e^2 \sqrt{(1-e^2)}$$

$$K'' = K' - \frac{\frac{1.3}{2.4}\Delta^4}{(1+\Delta^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad = K' - \frac{1.3}{2.4} e^4 \sqrt{(1-e^2)}$$

$$K''' = K'' - \frac{\frac{1.3.5}{2.4.6}\Delta^6}{(1+\Delta^2)^{\frac{7}{2}}} \qquad = K'' - \frac{1.3.5}{2.4.6} e^6 \sqrt{(1-e^2)}$$

ec.

si avrà

$$f = \cos\lambda \left[K + \frac{1}{2} K' \operatorname{sen}\lambda^2 + \frac{1.3}{2.4} K'' \operatorname{sen}\lambda^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} K''' \operatorname{sen}\lambda^6 + \text{ec.} \right]$$

Posto in oltre

$$Q' = f - K \cos\lambda$$

$$Q'' = \frac{2}{3} Q' - \frac{1}{3} K' \operatorname{sen}\lambda^2 \cos\lambda$$

$$Q''' = \frac{4}{5} Q'' - \frac{1}{5} K'' \operatorname{sen}\lambda^4 \cos\lambda$$

$$Q^{IV} = \frac{6}{7} Q''' - \frac{1}{7} K''' \operatorname{sen}\lambda^6 \cos\lambda$$

ec.

ne risulterà

$$f' = Q' + Q'' + Q''' + Q^{IV} + \text{ec.}$$

$f'' = Q'' + 2\,Q''' + 3\,Q^{IV} + 4\,Q^{V} + \text{ec.}$

$f''' = Q''' + 3\,Q^{IV} + 6\,Q^{V} + 10\,Q^{VI} + \text{ec.}$

$$f^{(m)} = Q^{(m)} + \frac{m}{1}Q^{(m+1)} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}Q^{(m+2)} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}Q^{(m+3)} + \text{ec.}$$

Da questi valori di f', f'', f''' ec. si formeranno come sopra (§ 25) i coefficienti A', B', C', ec. Ovvero basterà fare

$$A' = \frac{Q'}{2} + \frac{2}{1}\cdot\frac{Q''}{2^3} + \frac{2.5}{1.2}\cdot\frac{Q'''}{2^5} + \frac{2.6.7}{1.2.3}\cdot\frac{Q^{IV}}{2^7} + \text{ec.}$$

$$B' = \frac{Q''}{2^3} + \frac{4}{1}\cdot\frac{Q'''}{2^5} + \frac{4.7}{1.2}\cdot\frac{Q^{IV}}{2^7} + \frac{4.8.9}{1.2.3}\cdot\frac{Q^{V}}{2^9} + \text{ec.}$$

$$C' = \frac{Q'''}{2^5} + \frac{6}{1}\cdot\frac{Q^{IV}}{2^7} + \frac{6.9}{1.2}\cdot\frac{Q^{V}}{2^9} + \frac{6.10.11}{1.2.3}\cdot\frac{Q^{VI}}{2^{11}} + \text{ec.}$$

ec.

Onde prendendo il valore di ϖ negativamente (§ 21) e riflettendo che si ha $z' = 90°$, otterremo

$$\varpi = 90° - z - f(90° - \upsilon) - A'\operatorname{sen} 2\upsilon + B'\operatorname{sen} 4\upsilon - C'\operatorname{sen} 6\upsilon + \text{ec.}$$

Nella quale espressione è

$$\operatorname{sen}\upsilon = \frac{\operatorname{sen}\Phi}{\operatorname{sen}\lambda},\ \text{e}\ \operatorname{tang} z = \cos\lambda \operatorname{tang}\upsilon\,.$$

Si otterrebbe questo medesimo valore di ϖ integrando la formola già trovata (§ 21)

$$d\varpi = \frac{-d\phi\cos\lambda}{\cos\phi\sqrt{(\cos\phi^2 - \cos\lambda^2)}}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-e^2}{(1-e^2\operatorname{sen}\phi^2)}\right)}$$

o sia

$$d\varpi = \frac{-d\upsilon \cos\lambda}{1 - \text{sen}\,\lambda^2\,\text{sen}\,\upsilon^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1 + \Delta^2 (1 - \text{sen}\,\lambda^2\,\text{sen}\,\upsilon^2)]}}$$

poichè quest' ultima formola risulta dalla formola (5), facendo in essa $\zeta = 90^\circ$, o sia $p = 90^\circ - \lambda$, e $D' = 0$, e prendendola negativamente.

31. I valori di P, e ϖ trovati (§§ 28 e 30) nel caso particolare di $\zeta = 90^\circ$ sono notabilmente più semplici di quelli ottenuti precedentemente nel caso generale (§§ 24 e 25). In fatti non solamente tutti i termini moltiplicati in h', h'', h''', ec. del valore di P; ed i termini moltiplicati in c', c'', c''', ec. del valore di ϖ sono scomparsi, ma ancora i coefficienti residui g, A, B, C, ec. e f, f', A', B', C', ec. non richiedono un calcolo più lungo di quello che fa d' uopo per avere il valore d' un arco elittico del Meridiano (§§ 16, 17). Sarebbe pertanto da desiderarsi che colla sostituzione d' una nuova variabile si potessero ridurre i valori di P, e ϖ nel caso generale alla stessa semplicità che ha luogo nel caso di $\zeta = 90^\circ$. Ora per mezzo della sostituzione usata da *Séjour* (*a*), la quale consiste nel ridurre le latitudini sullo sferoide elittico alle latitudini corrispondenti sulla sfera inscritta, si arriva facilmente a questo scopo.

32. Sia pertanto P M E (Fig. 3ᵃ.) l' arco elittico d' un Meridiano dello sferoide, e P R F l'arco circolare corrispondente della sfera inscritta, cioè della sfera descritta col centro C e col raggio P C = b. Condotte

---

(*a*) *Mémoires de l' Académie R. des Sciences de Paris. Année 1778 pag. 73. Traité analytique des mouvemens apparens des corps célèstes. Tom. 2.*

le coordinate SM, QM a qualunque punto M del Meridiano, e la normale MN, sarà (§ 12)

$$\text{tang MNE} = \frac{SM}{SN}, \text{ o sia } \text{tang}\, \phi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x}.$$

Al punto R, dove l' ascissa QM taglia il circolo PRF, si tiri il raggio CR, e pongasi l'angolo RCE $= \phi'$, si avrà

$$\text{tang}\, \phi' = \frac{GR}{CG} = \frac{SM}{QR} = \frac{y}{\sqrt{(b^2 - y^2)}}.$$

Ma dall' equazione all' elisse (§ 11) si ha

$$\sqrt{(b^2 - y^2)} = \frac{b}{a} \cdot x. \text{ Dunque sarà } \text{tang}\, \phi' = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}.$$

Quindi risulta

$$\text{tang}\, \phi' = \frac{b}{a} \text{tang}\, \phi = \sqrt{(1 - e^2)}.\text{tang}\, \phi = \frac{\text{tang}\, \phi}{\sqrt{(1 + \Delta^2)}}.$$

Dalla qual formola si otterrà facilmente l' arco ϕ' per mezzo di ϕ.

33. Se in vece del rapporto fra le tangenti si vuole il rapporto immediato fra gli archi stessi ϕ e ϕ', si potrà esso ottenere col metodo insegnato dal sommo geometra *La Grange* (*a*); poichè essendo

$$\begin{aligned} \text{tang}\, (\phi - \phi') &= \frac{\text{tang}\, \phi - \text{tang}\, \phi'}{1 + \text{tang}\, \phi \text{ tang}\, \phi'} \\ &= \frac{(a - b) \text{ tang}\, \phi'}{b + a \text{ tang}\, \phi'^2} \\ &= \frac{(a - b) \text{ sen } 2\, \phi'}{a + b - (a - b) \cos 2\, \phi'} \end{aligned}$$

(*a*) *Mémoires de l' Académie R. de Berlin. Année 1774.* Un' altra dimostrazione si può vedere nell' *Effemeridi Astronomiche di Milano per l' anno 1785. pag. 187.*

posto per brevità $H = \frac{a-b}{a+b}$, sarà

$$\tang(\phi - \phi') = \frac{H \operatorname{sen} 2\phi'}{1 - H \cos 2\phi'}$$

Mettendo in questa equazione in vece di $\tang(\phi - \phi')$, di $\operatorname{sen} 2\phi'$, e di $\cos 2\phi'$ i loro valori espressi cogli esponenziali immaginarj, ed indicando con E il numero, di cui il logaritmo iperbolico è $= 1$, si avrà

$$\frac{E^{2(\phi-\phi')\sqrt{-1}} - 1}{E^{2(\phi-\phi')\sqrt{-1}} + 1} = \frac{H \,.\, E^{4\phi'\sqrt{-1}} - H}{2.E^{2\phi'\sqrt{-1}} - H \,.\, E^{4\phi'\sqrt{-1}} - H}.$$

da cui si ricava

$$E^{2(\phi-\phi')\sqrt{-1}} = \frac{1 - H \,.\, E^{-2\phi\sqrt{-1}}}{1 - H \,.\, E^{2\phi'\sqrt{-1}}}$$

o sia passando ai logaritmi

$$2(\phi-\phi')\sqrt{-1} = \log\left(1 - H \,.\, E^{-2\phi'\sqrt{-1}}\right) - \log\left(1 - H.E^{2\phi'\sqrt{-1}}\right)$$

$$= -H.E^{-2\phi'\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} H^2.E^{-4\phi'\sqrt{-1}} - \frac{1}{3} H^3.E^{-6\phi'\sqrt{-1}} - \text{ec.}$$

$$+ H.E^{2\phi'\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} H^2.E^{4\phi'\sqrt{-1}} + \frac{1}{3} H^3.E^{6\phi'\sqrt{-1}} + \text{ec.}$$

onde sarà

$$\phi = \phi' + H \operatorname{sen} 2\phi' + \frac{1}{2} H^2 \operatorname{sen} 4\phi' + \frac{1}{3} H^3 \operatorname{sen} 6\phi' + \text{ec.}$$

Reciprocamente si otterrà ϕ' per mezzo di ϕ; poichè essendo

$$\tang(\phi - \phi') = \frac{\tang\phi - \tang\phi'}{1 + \tang\phi\,\tang\phi'}$$

$$= \frac{(a - b)\tang\phi}{a + b\tang\phi^2}$$

$$= \frac{H\,\mathrm{sen}\,2\phi}{1 + H\cos 2\phi}$$

collo stesso metodo risulterà

$$\phi' = \phi - H\,\mathrm{sen}\,2\phi + \frac{1}{2}H^2\mathrm{sen}\,4\phi - \frac{1}{3}H^3\mathrm{sen}\,6\phi + \frac{1}{4}H^4\mathrm{sen}\,8\phi - \text{ec.}$$

Il coefficiente $H = \frac{a - b}{a + b}$ si può esprimere in diverse maniere. Facendo (§ 15) $\frac{a - b}{b} = \alpha$, sarà $H = \frac{\alpha}{2 + \alpha}$.

Volendosi poi esprimere H per mezzo della eccentricità, si avrà

$$H = \frac{1 - \sqrt{(1 - e^2)}}{1 + \sqrt{(1 - e^2)}} = \left[\frac{e}{1 + \sqrt{(1 - e^2)}}\right]^2.$$

Onde sarà generalmente *(a)*

$$H^m = \left(\frac{e}{2}\right)^{2m}\left[1 + \frac{2m}{1}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{2m}{1}\cdot\frac{2m+3}{2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{2m}{1}\cdot\frac{2m+4}{2}\cdot\frac{2m+5}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 \right.$$
$$\left. + \frac{2m}{1}\cdot\frac{2m+5}{2}\cdot\frac{2m+6}{3}\cdot\frac{2m+7}{4}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \text{ec.}\right]$$

Similmente essendo

(a) Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1805. Appendice. pag. 12.

$$H = \frac{\sqrt{(1+\Delta^2)} - 1}{\sqrt{(1+\Delta^2)} + 1} = \left[\frac{\Delta}{1+\sqrt{(1+\Delta^2)}}\right]^2,$$

si avrà ancora in generale

$$H^m = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{2m}\left[1 - \frac{2m}{1}\cdot\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \frac{2m}{1}\cdot\frac{2m+3}{2}\cdot\left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 - \frac{2m}{1}\cdot\frac{2m+4}{2}\cdot\frac{2m+5}{3}\cdot\left(\frac{\Delta}{2}\right)^6 + \text{ec.}\right]$$

34. Per una qualunque altra latitudine $= \lambda$ si otterrà la corrispondente latitudine λ' sulla sfera inscritta prendendo

$$\operatorname{tang}\lambda' = \frac{b}{a} = \operatorname{tang}\lambda = \sqrt{(1-e^2)}\,.\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\sqrt{(1+\Delta^2)}};$$

ed i rapporti che passano fra ϕ, e ϕ' avranno egualmente luogo fra λ, e λ'. Essendo poi

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\operatorname{tang}\phi}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}\phi^2)}}, \text{ e } \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}\phi^2)}},$$

si avrà

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi'}{\sqrt{(1-e^2\cos\phi'^2)}} \;\ldots\ldots\; \operatorname{sen}\lambda = \frac{\operatorname{sen}\lambda'}{\sqrt{(1-e^2\cos\lambda'^2)}}$$

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{(1-e^2)}\,.\cos\phi'}{\sqrt{(1-e^2\cos\phi'^2)}} \;\ldots\ldots\; \cos\lambda = \frac{\sqrt{(1-e^2)}.\cos\lambda'}{\sqrt{(1-e^2\cos\lambda'^2)}}$$

In oltre sarà $d\phi = \frac{d\phi'.\sqrt{(1-e^2)}}{1-e^2\cos\phi'^2}$. Sostituendo questi valori nelle prime tre equazioni (1), (2), (3), sopra (§ 20) trovate, esse diventeranno

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\cos\lambda'}{\cos\phi'}\operatorname{sen}\zeta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (10)$$

$$d.\,LM = \frac{a\,d\phi'\cos\phi'\sqrt{(1-e^2\cos\phi'^2)}}{\sqrt{(\cos\phi'^2-\operatorname{sen}\zeta^2\cos\lambda'^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$d\,\varpi = \frac{d\phi'\operatorname{sen}\zeta\cos\lambda'\sqrt{(1-e^2\cos\phi'^2)}}{\cos\phi'\sqrt{(\cos\phi'^2-\operatorname{sen}\zeta^2\cos\lambda'^2)}} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

35. Le due ultime equazioni (11) e (12) si ridurranno a maggior semplicità, facendo $\operatorname{sen} p' = \operatorname{sen}\zeta\cos\lambda'$; ed in oltre $\operatorname{sen} V = \frac{\operatorname{sen}\phi'}{\cos p'}$; poichè essendo

$\cos\phi'^2 - \operatorname{sen} p'^2 = \cos p'^2 \cos V^2$, e di più

$d V = \frac{d\phi'\cos\phi'}{\sqrt{(\cos\phi'^2-\operatorname{sen} p'^2)}}$; l'equazione (11) risulterà

$$d.\,LM = a.dV\sqrt{\left[1-e^2(1-\cos p'^2\operatorname{sen}V^2)\right]}$$

$$= b.dV\sqrt{\left[1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos p'^2\operatorname{sen}V^2\right]}$$

Supponendo pertanto, come sopra (§ 23), $P = \frac{LM}{b}$,

ed avvertendo che $\frac{e^2}{1-e^2} = \Delta^2$, si avrà

$$dP = dV.\sqrt{(1+\Delta^2\cos p'^2\operatorname{sen}V^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

I medesimi valori di $\operatorname{sen} p'$ e di $\operatorname{sen} V$ sostituiti nell'equazione (12) daranno

$$d\,\varpi = \frac{\operatorname{sen} p'.\,dV}{1-\cos p'^2\operatorname{sen}V^2}.\sqrt{\left[1-e^2(1-\cos p'^2\operatorname{sen}V^2)\right]} \ldots (14)$$

36. L'integrale della formola (13) si otterrà facilmente riducendo in serie il radicale $\sqrt{(1+\Delta^2\cos p'^2\operatorname{sen}V^2)}$. In fatti sarà

$$dP = dV\left[1 + \frac{1}{2}\Delta^2 \cos p'^2 \operatorname{sen} V^2 - \frac{1.1}{2.4}\Delta^4 \cos p'^4 \operatorname{sen} V^4 \right.$$
$$\left. + \frac{1.1.3}{2.4.6}\Delta^6 \cos p'^6 \operatorname{sen} V^6 - \text{ec.}\right]$$

Ora abbiamo già veduto sopra (§ 16) la forma dell' integrale $\int dV \operatorname{sen} V^{2n}$; facendo pertanto

$$Q' = \frac{1}{2^2}\Delta^2 \cos p'^2 - \frac{1.3}{2^2.4^2}\Delta^4 \cos p'^4 + \frac{1.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\Delta^6 \cos p'^6 - \frac{1.3^2\, 5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}\Delta^8 \cos p'^8 + \text{ec.}$$

$$Q'' = \frac{2}{3}Q' - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\Delta^2 \cos p'^2$$

$$Q''' = \frac{4}{5}Q'' + \frac{1}{5}\cdot\frac{1.1}{2.4}\Delta^4 \cos p'^4$$

$$Q^{IV} = \frac{6}{7}Q''' - \frac{1}{7}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}\Delta^6 \cos p'^6$$

ec.

risulterà l' integrale

$$P + \mathit{costante} = (1 + Q')V - Q' \operatorname{sen} V \cos V - Q'' \operatorname{sen} V^3 \cos V - Q''' \operatorname{sen} V^5 \cos V - \text{ec.}$$

Quindi facendo come sopra (§ 16)

$$R' = \frac{Q'}{2} + \frac{2}{1}\cdot\frac{Q''}{2^3} + \frac{2.5}{1.2}\cdot\frac{Q'''}{2^5} + \frac{2.6.7}{1.2.3}\cdot\frac{Q^{IV}}{2^7} + \text{ec.}$$

$$R'' = \frac{Q''}{2^3} + \frac{4}{1}\cdot\frac{Q'''}{2^5} + \frac{4.7}{1.2}\cdot\frac{Q^{IV}}{2^7} + \frac{4.8.9}{1.2.3}\cdot\frac{Q^{V}}{2^9} + \text{ec.}$$

$$R''' = \frac{Q'''}{2^5} + \frac{6}{1}\cdot\frac{Q^{IV}}{2^7} + \frac{6.9}{1.2}\cdot\frac{Q^{V}}{2^9} + \frac{6.10.11}{1.2.3}\cdot\frac{Q^{VI}}{2^{11}} + \text{ec.}$$

ec.

e determinando la *costante* in modo che sia $P=0$ quando $\varphi=\lambda$, o sia quando $\varphi'=\lambda'$, nel qual caso V diventa $V'=$ Angolo sen. $\left(\frac{\text{sen } \lambda'}{\cos p'}\right)$, cioè $\text{sen } V'=\frac{\text{sen } \lambda'}{\cos p'}$; avremo finalmente

$$\begin{aligned} P=(1+Q')(V-V') &- R'(\text{sen } 2V-\text{sen } 2V') \\ &+ R''(\text{sen } 4V-\text{sen } 4V') \\ &- R'''(\text{sen } 6V-\text{sen } 6V') \\ &+ \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15) \end{aligned}$$

37. Riducendo similmente in serie il radicale $\sqrt{[1-e^2(1-\cos p'^2 \text{ sen } V^2)]}$, l' equazione (14) diventerà

$$\begin{aligned} d\varpi = \frac{\text{sen } p' \,.\, dV}{1-\cos p'^2 \text{ sen } V^2} - dV.\text{ sen } p' \Big[&\frac{1}{2}e^2 + \frac{1.1}{2.4}e^4(1-\cos p'^2 \text{sen } V^2) \\ &+ \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6(1-\cos p'^2 \text{sen } V^2)^2 \\ &+ \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}e^8(1-\cos p'^2 \text{sen } V^2)^3 \\ &+ \text{ec.} \Big] \end{aligned}$$

Ora il primo termine $\frac{\text{sen } p' \,.\, dV}{1-\cos p'^2 \text{ sen } V^2}$ ha per integrale l' angolo la cui tangente è eguale a $\text{sen } p' \text{ tang } V$, cosicchè facendo $\text{tang } Z=\text{sen } p' \text{ tang } V$, sarà $\int \frac{\text{sen } p' \,.\, dV}{1-\cos p'^2 \text{ sen } V^2}=Z$. Gli altri termini s' integreran-

no facilmente mediante l' espressione generale (§ 16) di $\int d\, V \operatorname{sen} V^{2n}$. Pongasi dunque

$$L = 1 - \sqrt{(1-e^2)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\Delta^2)}}$$

$$L' = \frac{\frac{1}{2}e^2}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} - L \quad = \frac{\frac{1}{2}\Delta^2}{\sqrt{(1+\Delta^2)}} \quad - L$$

$$L'' = \frac{\frac{1.1}{2.4}e^4}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} - L' \quad = \frac{\frac{1.1}{2.4}\Delta^4}{\sqrt{(1+\Delta^2)}} \quad - L'$$

$$L''' = \frac{\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}} - L'' \quad = \frac{\frac{1.1.3}{2.4.6}\Delta^6}{\sqrt{(1+\Delta^2)}} \quad - L''$$

ec.

ed in seguito facciasi

$$M = L - \frac{1}{2} L' \cos p'^2 + \frac{1.3}{2.4} L'' \cos p'^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} L''' \cos p'^6 + \text{ec.}$$

$$M' = M - L$$

$$M'' = \frac{2}{3} M' + \frac{1}{3} L' \cos p'^2$$

$$M''' = \frac{4}{5} M'' - \frac{1}{5} L'' \cos p'^4$$

$$M^{\text{IV}} = \frac{6}{7} M''' + \frac{1}{7} L''' \cos p'^6$$

ec.

si avrà

$$\varpi + costante = Z - V.M \operatorname{sen} p' + M' \operatorname{sen} p' \operatorname{sen} V \cos V + M'' \operatorname{sen} p' \operatorname{sen} V^3 \cos V$$
$$+ M''' \operatorname{sen} p' \operatorname{sen} V^5 \cos V + ec.$$

La *costante* si determinerà facendo $\phi' = \lambda'$ quando $\varpi = 0$, nel qual caso è $V = V' =$ Angolo $\operatorname{sen}.\left(\frac{\operatorname{sen} \lambda'}{\cos p'}\right)$;

Posto pertanto $\operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} \lambda'}{\cos p'}$, e $\operatorname{tang} Z' = \operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V'$;

facendo ancora

$$N' = \frac{M'}{2} + \frac{2}{1} \cdot \frac{M''}{2^3} + \frac{2.5}{1.2} \cdot \frac{M'''}{2^5} + \frac{2.6.7}{1.2.3} \cdot \frac{M^{IV}}{2^7} + ec.$$

$$N'' = \frac{M''}{2^3} + \frac{4}{1} \cdot \frac{M'''}{2^5} + \frac{4.7}{1.2} \cdot \frac{M^{IV}}{2^7} + \frac{4.8.9}{1.2.3} \cdot \frac{M^{V}}{2^9} + ec.$$

$$N''' = \frac{M'''}{2^5} + \frac{6}{1} \cdot \frac{M^{IV}}{2^7} + \frac{6.9}{1.2} \cdot \frac{M^{V}}{2^9} + \frac{6.10.11}{1.2.3} \cdot \frac{M^{VI}}{2^{11}} + ec.$$

ec.

ne risulterà

$$\varpi = Z - Z' - M(V - V') \operatorname{sen} p' + N' \operatorname{sen} p' (\operatorname{sen} 2V - \operatorname{sen} 2V')$$
$$- N'' \operatorname{sen} p' (\operatorname{sen} 4V - \operatorname{sen} 4V')$$
$$+ N''' \operatorname{sen} p' (\operatorname{sen} 6V - \operatorname{sen} 6V')$$
$$- ec. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

A questa equazione ed alla precedente (§ 36) si applicherà l'avvertenza più volte accennata (§§ 18, 26); cioè il termine $(1 + Q')(V - V')$ nell' equazione (15), ed i termini ϖ, $Z - Z'$, $M(V - V') \operatorname{sen} p$ nell' equazione (16) si

moltiplicheranno per la quantità costante $\frac{\pi}{180}$, oppure per $\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{60^2}$, se si vogliono esprimere gli angoli V, V', Z, Z', ϖ in gradi e decimali di grado, oppure in minuti secondi. Inoltre nelle stesse equazioni (15) e (16) si prenderanno P, e ϖ negativamente (§ 21) se la latitudine ϕ fosse minore della latitudine λ.

38. Ognuno vede che l'equazioni (10), (15), e (16) sono molto più semplici delle loro equivalenti (1), (6), e (7) trovate precedentemente. Le une e le altre comprendono le formole fondamentali della trigonometria sferoidica; ma, eccettuati alcuni casi particolari, noi preferiremo in tutte le questioni seguenti l' equazioni ultimamente trovate. Cominceremo pertanto a sciogliere con esse il già (§ 26) accennato

Problema I°.

Dati nel triangolo sferoidico elittico PLM (Fig. II) i tre elementi λ, ϕ, ζ trovare gli altri tre elementi θ, P, ϖ.

Soluzione.

Dalle date latitudini λ, ϕ si dedurranno in primo luogo le corrispondenti latitudini λ', ϕ' nella sfera inscritta (§§ 32, 33). Quindi si otterrà l' angolo θ dalla formola (10) (§ 34) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\cos\lambda'}{\cos\phi'}\operatorname{sen}\zeta$.

In seguito, posto $\operatorname{sen} p' = \operatorname{sen}\zeta\cos\lambda'$, si calceran-

no i coefficienti Q', R', R'', R''', ec. (§ 36) e gli angoli V', V per mezzo delle formole $\operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} \lambda'}{\cos p'}$; $\operatorname{sen} V = \frac{\operatorname{sen} \Phi'}{\cos p'}$; e queste quantità sostituite nell' equazione (15) (§ 36) daranno il valore di P. Finalmente calcolando i coefficienti M, N', N'', N''', ec. colle regole sopra esposte (§ 37), e gli angoli Z', Z per mezzo delle formole $\operatorname{tang} Z' = \operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V$; $\operatorname{tang} Z = \operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V$, si avrà la differenza in longitudine $= \varpi$ mediante l'equazione (16) (§ 37).

39. Una delle questioni più importanti e di un uso più frequente nei calcoli geodetici si è di ritrovare Φ per mezzo dei tre elementi P, λ, ζ; vale a dire colla via brevissima che unisce due punti sulla superficie sferoidica, colla latitudine di uno dei due punti, e coll' angolo compreso fra la via brevissima ed il Meridiano di questo punto determinare la latitudine dell'altro punto.

40. Qualora si trascurino la quarta e le più alte potenze dell' eccentricità, la soluzione del problema è facilissima. In fatti prendendo in primo luogo l' equazione (6) e tralasciando in essa i termini moltiplicati in $\Delta^4, \Delta^6, \Delta^8$ ec. si avrà (§ 27)

$$P = \left(1 + \frac{1}{4}\Delta^2 \cos p^2\right)\left(v - v'\right) - \frac{3}{8}\Delta^2 \cos p^2 \left[\operatorname{sen} 2v - \operatorname{sen} 2v'\right]$$

$$- \frac{1}{2}\Delta^2 \operatorname{sen} p^2 \left[\operatorname{tang} v \cos v'^2 - \operatorname{sen} v' \cos v'\right]$$

o sia, moltiplicando l'angolo $v - v'$ per $\frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{60^2} = \operatorname{sen} 1''$,

a fine di esprimerlo in minuti secondi (§ 26), ed avvertendo che si ha

$$\text{sen } 2\,\upsilon - \text{sen } 2\,\upsilon' = 2\,\text{sen}\,(\upsilon - \upsilon')\cos(\upsilon + \upsilon'),\ \text{sarà}$$

$$P = (\upsilon - \upsilon')\,\text{sen } 1''\left[1 + \frac{1}{4}\Delta^2\cos p^2\right] - \frac{1}{4}\Delta^2\cos p^2\,\text{sen}\,(\upsilon - \upsilon')\left[3\cos(\upsilon + \upsilon') + 2.\frac{\cos\upsilon'}{\cos\upsilon}\,\text{tang}\,p^2\right]$$

Dividendo l' equazione per $\text{sen } 1''\left[1 + \frac{1}{4}\Delta^2\cos p^2\right]$,

e facendo per brevità $\frac{P}{\text{sen } 1''} = \Omega'$, avremo

$$\upsilon = \upsilon' + \Omega' - \frac{1}{4}\Delta^2\cos p^2\left[\Omega' - \frac{3\,\text{sen}\,(\upsilon - \upsilon')\cos(\upsilon + \upsilon')}{\text{sen } 1''} - \frac{2\,\text{sen}\,(\upsilon - \upsilon')\cos\upsilon'\,\text{tang}\,p^2}{\text{sen } 1''\cos\upsilon}\right]$$

e siccome si trascurano per ipotesi le quantità moltiplicate in Δ^4, si potrà nel secondo membro mettere semplicemente $\upsilon' + \Omega'$ in vece di υ; onde ne risulterà

$$\upsilon = \upsilon' + \Omega' - \frac{1}{4}\Delta^2\cos p^2\left[\Omega' - \frac{\text{sen}\,\Omega'}{\text{sen } 1''}\left(3\cos(2\upsilon' + \Omega') + \frac{2\cos\upsilon'\,\text{tang}\,p^2}{\cos(\upsilon' + \Omega')}\right)\right]$$

Le quantità Ω', p, υ' si calcoleranno per mezzo dei tre dati elementi P, λ, ζ, avendosi (§ 23)

$$\Omega' = \frac{P}{\text{sen } 1''}\ ;\ \text{sen } p = \text{sen}\,\zeta\cos\lambda\ ;\ \text{sen}\,\upsilon' = \frac{\text{sen}\,\lambda}{\cos p}\ ;$$

e l' equazione trovata darà l' angolo υ, da cui si ricaverà la latitudine cercata φ mediante la formola

$\text{sen}\,\varphi = \text{sen}\,\upsilon\cos p.$

41. Nella trovata equazione si è supposto $\varphi > \lambda$; se fosse $\varphi < \lambda$ la quantità Ω' dovrebbe prendersi negativamente (§ 21). Sarà pertanto generalmente

$$\upsilon = \upsilon' \pm \Omega' \left(1 - \frac{1}{4}\Delta^2 \cos p^2\right) \pm \frac{1}{4}\Delta^2 \cos p^2 \frac{\text{sen}\,\Omega'}{\text{sen}\,1''}\left[3\cos(2\upsilon' \pm \Omega') + \frac{2\cos\upsilon' \tan g\, p^2}{\cos(\upsilon' \pm \Omega')}\right]$$

ed avrà luogo il segno superiore quando $\varphi > \lambda$, e l'inferiore quando $\varphi < \lambda$.

42. Trattando nella stessa guisa l'equazione (15) (§ 36), la quale, negligentando per ipotesi $\Delta^4, \Delta^6, \Delta^8$, ec; si riduce a

$$\pm P = \left(1 + \frac{1}{4}\Delta^2 \cos p'^2\right)(V - V') - \frac{1}{4}\Delta^2 \cos p'^2 \text{sen}\,(V - V')\cos(V + V')$$

otterremo

$$V = V' \pm \Omega' \left(1 - \frac{1}{4}\Delta^2 \cos p'^2\right) \pm \frac{1}{4}\Delta^2 \frac{\cos p'^2 \,\text{sen}\,\Omega'}{\text{sen}\,1''}\cos(2V' \pm \Omega');$$

ed avrà luogo, come sopra (§ 41), il segno superiore quando $\varphi > \lambda$, e l'inferiore quando $\varphi < \lambda$. Dagli elementi P, ζ, λ si avrà $\Omega' = \frac{P}{\text{sen}\,1''}$, p', V'; poichè, determinata (§ 34) nella sfera inscritta la latitudine λ' corrispondente alla data latitudine λ nello sferoide elittico, sarà (§§ 35, 36)

$$\text{sen}\,p' = \text{sen}\,\zeta \cos\lambda'$$

$$\text{sen}\,V' = \frac{\text{sen}\,\lambda'}{\cos p'}$$

L'equazione trovata darà l'angolo V, e quindi essendo

$$\text{sen}\,\varphi' = \text{sen}\,V \cos p'$$

si otterrà la latitudine ϕ' nella sfera inscritta, a cui si troverà (§ 33) la corrispondente latitudine ϕ nello sferoide.

43. La soluzione completa del proposto problema (§ 39), cioè quella in cui si tenga conto di tutte le potenze dell'eccentricità, non si può ottenere se non col metodo del ritorno delle serie. Noi però tenteremo di ricavarla dal seguente elegante teorema del sommo geometra *La Grange (a)*. Data l'equazione

$$o = z - x + \Phi x$$

in cui Φx esprime una qualunque funzione di x; il valore di un'altra qualunque funzione di x, come sarebbe

ψx, posto $\dfrac{d.\psi x}{dx} = \psi' x$, sarà

$$\psi x + \Phi x.\psi' x + \frac{d.[\Phi x^2.\psi' x]}{2\,dx} + \frac{d^2.[\Phi x^3.\psi' x]}{2.3\,dx^2} + \frac{d^3.[\Phi x^4.\psi' x]}{2.3.4\,dx^3} + \text{ec.}$$

purchè dopo le differenziazioni si ponga z in luogo di x. Quindi se fosse data l'equazione

$$o = t - V - \Phi V$$

si avrà

$$\psi V = \psi t - \Phi t.\psi' t + \frac{d.(\Phi t^2.\psi' t)}{2\,dt} - \frac{d^2.(\Phi t^3.\psi' t)}{2.3\,dt^2} + \frac{d^3.(\Phi t^4.\psi' t)}{2.3.4\,dt^3} - \text{ec.}$$

44. L'equazione (15) trovata sopra (§ 36) si ridurrà alla forma dell'equazione precedente, facendo

---

(a) *Mémoires de l' Acad. R. des Sciences de Berlin. Année 1768. pag. 275.*

$$\omega = \frac{P}{1+Q'}\ ;\ \alpha' = \frac{-R'}{1+Q'}\ ;\ \alpha'' = \frac{R''}{1+Q'}\ ;\ \alpha''' = \frac{-R'''}{1+Q'}\ ;\text{ec.}$$

ed in seguito posto

$$\Phi V = \alpha' \operatorname{sen} 2V + \alpha'' \operatorname{sen} 4V + \alpha''' \operatorname{sen} 6V + \text{ec.}$$

ed in oltre

$$t = \omega + V' + \alpha' \operatorname{sen} 2V' + \alpha'' \operatorname{sen} 4V' + \alpha''' \operatorname{sen} 6V' + \text{ec.}$$

o sia

$$t = \omega + V' + \Phi V'$$

La detta equazione (15) avrà la forma richiesta, cioè sarà

$$o = t - V - \Phi V$$

Onde prendendo $\psi V = V$, cosicchè sia

$$\psi t = t, \text{e} \frac{d\psi t}{dt} = \psi' t = 1,$$

avremo il cercato valore dell' angolo V, che sarà

$$V = t - \Phi t + \frac{d.(\Phi t)^2}{2dt} - \frac{d^2.(\Phi' t)^3}{2.3dt^2} + \frac{d^3.(\Phi t)^4}{2.3.4dt^3} - \text{ec.}$$

nella quale espressione si ha

$$\Phi t = \alpha' \operatorname{sen} 2t + \alpha'' \operatorname{sen} 4t + \alpha''' \operatorname{sen} 6t + \text{ec.}$$

45. Per ottenere in primo luogo i valori di Φt^2; Φt^3; Φt^4; ec. suppongansi date due altre funzioni di t, cioè Ft, ft espresse nella seguente maniera

$$Ft = \beta' \operatorname{sen} 2t + \beta'' \operatorname{sen} 4t + \beta''' \operatorname{sen} 6t + \text{ec.}$$

$$\mathrm{f\,t} = \gamma + \gamma' \cos 2\,t + \gamma'' \cos 4\,t + \gamma''' \cos 6\,t + \text{ec.}$$

si avrà il prodotto

$$\Phi\,t.\,\mathrm{F}\,t = \frac{\alpha'\beta'}{2} + \frac{\alpha''\beta''}{2} + \frac{\alpha'''\beta'''}{2} + \frac{\alpha^{\mathrm{IV}}\beta^{\mathrm{IV}}}{2} + \text{ec.}$$

$$+ \left[\frac{\alpha''\beta'}{2} + \frac{(\alpha'''+\alpha')\beta''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{IV}}+\alpha'')\beta'''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{V}}+\alpha''')\beta^{\mathrm{IV}}}{2} + \text{ec.}\right]\cos 2\,t$$

$$+ \left[\frac{(\alpha'''-\alpha')\beta'}{2} + \frac{\alpha^{\mathrm{IV}}\beta''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{V}}+\alpha')\beta'''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{VI}}+\alpha'')\beta^{\mathrm{IV}}}{2} + \text{ec.}\right]\cos 4\,t$$

$$+ \left[\frac{(\alpha^{\mathrm{IV}}-\alpha'')\beta'}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{V}}-\alpha')\beta''}{2} + \frac{\alpha^{\mathrm{VI}}\beta'''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{VII}}+\alpha')\beta^{\mathrm{IV}}}{2} + \text{ec.}\right]\cos 6\,t$$

$$+ \left[\frac{(\alpha^{\mathrm{V}}-\alpha''')\beta'}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{VI}}-\alpha'')\beta''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{VII}}-\alpha')\beta'''}{2} + \frac{\alpha^{\mathrm{VIII}}\beta^{\mathrm{IV}}}{2} + \text{ec.}\right]\cos 8\,t$$

$$+ \text{ec.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{A})$$

Similmente sarà il prodotto

$$\Phi\,t.\mathrm{f}\,t = \left[\alpha'\gamma + \frac{\alpha''\gamma'}{2} + \frac{(\alpha'''-\alpha')\gamma''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{IV}}-\alpha'')\gamma'''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{V}}-\alpha''')\gamma^{\mathrm{IV}}}{2} + \text{ec.}\right]\text{sen } 2\,t$$

$$+ \left[\alpha''\gamma + \frac{(\alpha'''+\alpha')\gamma'}{2} + \frac{\alpha^{\mathrm{IV}}\gamma''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{V}}-\alpha')\gamma'''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{VI}}-\alpha'')\gamma^{\mathrm{IV}}}{2} + \text{ec.}\right]\text{sen } 4\,t$$

$$+ \left[\alpha'''\gamma + \frac{(\alpha^{\mathrm{IV}}+\alpha'')\gamma'}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{V}}+\alpha')\gamma''}{2} + \frac{\alpha^{\mathrm{VI}}\gamma'''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{VII}}-\alpha')\gamma^{\mathrm{IV}}}{2} + \text{ec.}\right]\text{sen } 6\,t$$

$$+ \left[\alpha^{\mathrm{IV}}\gamma + \frac{(\alpha^{\mathrm{V}}+\alpha''')\gamma'}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{VI}}+\alpha'')\gamma''}{2} + \frac{(\alpha^{\mathrm{VII}}+\alpha')\gamma'''}{2} + \frac{\alpha^{\mathrm{VIII}}\gamma^{\mathrm{IV}}}{2} + \text{ec.}\right]\text{sen } 8\,t$$

$$+ \text{ec.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{B})$$

Supponendo pertanto

$$\Phi\,t = \alpha' \text{ sen } 2\,t + \alpha'' \text{ sen } 4\,t + \alpha''' \text{ sen } 6\,t + \text{ec.}$$

$$\Phi\, t^2 = \beta + \beta' \cos 2\,t + \beta'' \cos 4\,t + \beta''' \cos 6\,t + \text{ec.}$$

$$\Phi\, t^3 = \gamma' \operatorname{sen} 2\,t + \gamma'' \operatorname{sen} 4\,t + \gamma''' \operatorname{sen} 6\,t + \text{ec.}$$

$$\Phi\, t^4 = \delta + \delta' \cos 2\,t + \delta'' \cos 4\,t + \delta''' \cos 6\,t + \text{ec.}$$

$$\Phi\, t^5 = \qquad \varepsilon' \operatorname{sen} 2\,t + \varepsilon'' \operatorname{sen} 4\,t + \varepsilon''' \operatorname{sen} 6\,t + \text{ec.}$$

$$\Phi\, t^6 = \zeta + \zeta' \cos 2\,t + \zeta'' \cos 4\,t + \zeta''' \cos 6\,t + \text{ec.}$$

ec.

è evidente dalla forma dei due prodotti (A), (B), che si avrà

$$\beta = \qquad \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{\alpha''^2}{2} + \frac{\alpha'''^3}{2} + \frac{\alpha^{\text{IV}2}}{2} + \text{ec.}$$

$$\beta' = \qquad \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha''' + \alpha'''\alpha^{\text{IV}} + \alpha^{\text{IV}}\alpha^{\text{V}} + \text{ec.}$$

$$\beta'' = -\frac{\alpha'^2}{2} + \alpha'\alpha''' + \alpha''\alpha^{\text{IV}} + \alpha'''\alpha^{\text{V}} + \text{ec.}$$

$$\beta''' = \qquad -\alpha'\alpha'' + \alpha'\alpha^{\text{IV}} + \alpha''\alpha^{\text{V}} + \alpha'''\alpha^{\text{VI}} + \text{ec.}$$

$$\beta^{\text{IV}} = -\frac{\alpha''^2}{2} - \alpha'\alpha''' + \alpha'\alpha^{\text{V}} + \alpha''\alpha^{\text{VI}} + \text{ec.}$$

$$\beta^{\text{V}} = \qquad -\alpha'\alpha^{\text{IV}} - \alpha''\alpha''' + \alpha'\alpha^{\text{VI}} + \alpha''\alpha^{\text{VII}} + \text{ec.}$$

$$\beta^{\text{VI}} = -\frac{\alpha'''^2}{2} - \alpha'\alpha^{\text{V}} - \alpha''\alpha^{\text{IV}} + \alpha'\alpha^{\text{VII}} + \text{ec.}$$

ec.

$$\gamma' = \alpha'\beta + \frac{\alpha''\beta'}{2} + \frac{(\alpha''' - \alpha')\beta''}{2} + \frac{(\alpha^{\text{IV}} - \alpha'')\beta'''}{2} + \frac{(\alpha^{\text{V}} - \alpha''')\beta^{\text{IV}}}{2} + \text{ec.}$$

$$\gamma'' = \alpha''\beta + \frac{(\alpha''' + \alpha')\beta'}{2} + \frac{\alpha^{\text{IV}}\beta''}{2} + \frac{(\alpha^{\text{V}} - \alpha')\beta'''}{2} + \frac{(\alpha^{\text{VI}} - \alpha'')\beta^{\text{IV}}}{2} + \text{ec.}$$

$$\gamma'''=\alpha'''\beta+\frac{(\alpha^{IV}+\alpha'')\beta'}{2}+\frac{(^{V}\alpha+\alpha')\beta''}{2}+\frac{\alpha^{VI}\beta'''}{2}+\frac{(\alpha^{VII}-\alpha')\beta^{IV}}{2}+\text{ec.}$$

$$\gamma^{IV}=\alpha^{IV}\beta+\frac{(\alpha^{V}+\alpha''')\beta'}{2}+\frac{(\alpha^{VI}+\alpha'')\beta''}{2}+\frac{(\alpha^{VII}+\alpha')\beta'''}{2}+\frac{\alpha^{VIII}\beta^{IV}}{2}+\text{ec.}$$

ec. . . . . (C)

$$\delta=\frac{\alpha'\gamma'}{2}+\frac{\alpha''\gamma''}{2}+\frac{\alpha'''\gamma'''}{2}+\frac{\alpha^{IV}\gamma^{IV}}{2}+\text{ec.}$$

$$\delta'=\frac{\alpha''\gamma'}{2}+\frac{(\alpha'''+\alpha')\gamma''}{2}+\frac{(\alpha^{IV}+\alpha'')\gamma'''}{2}+\frac{(\alpha^{V}+\alpha''')\gamma^{IV}}{2}+\text{ec.}$$

$$\delta''=\frac{(\alpha'''-\alpha')\gamma'}{2}+\frac{\alpha^{IV}\gamma''}{2}+\frac{(\alpha^{V}+\alpha')\gamma'''}{2}+\frac{(\alpha^{VI}+\alpha'')\gamma^{IV}}{2}+\text{ec.}$$

$$\delta'''=\frac{(\alpha^{IV}-\alpha'')\gamma'}{2}+\frac{(\alpha^{V}-\alpha')\gamma''}{2}+\frac{\alpha^{VI}\gamma'''}{2}+\frac{(\alpha^{VII}+\alpha')\gamma^{IV}}{2}+\text{ec.}$$

$$\delta''''=\frac{(\alpha^{V}-\alpha''')\gamma'}{2}+\frac{(\alpha^{VI}-\alpha'')\gamma''}{2}+\frac{(\alpha^{VII}-\alpha')\gamma'''}{2}+\frac{\alpha^{VIII}\gamma^{IV}}{2}+\text{ec.}$$

ec. . . . . (D)

Mettendo nelle equazioni (C) δ, δ', δ'' ec. in vece di β,β',β''ec. le quantità $\gamma',\gamma'',\gamma'''$,ec. diventeranno $\varepsilon',\varepsilon'',\varepsilon'''$ec. Mettendo nelle equazioni (D) ε', ε'', ε''' ec. in luogo di $\gamma',\gamma'',\gamma'''$ec. le quantità δ,δ',δ''ec. diventeranno ζ,ζ',ζ''ec; e così successivamente si determineranno tutti i coefficienti dei seni, e coseni di 2t, 4t, 6t, ec. che entrano nei valori di Φt^7, Φt^8, Φt^9, ec.

46. Avremo pertanto

$$\frac{d.(\Phi t)^2}{2\,dt}=-\frac{2\beta'}{2}\text{ sen }2t-\frac{4\beta''}{2}\text{ sen }4t-\frac{6\beta'''}{2}\text{ sen }6t-\text{ec.}$$

$$\frac{d^2(\Phi t)^3}{2.3\,dt^2}=-\frac{2^2\gamma'}{2.3}\text{ sen }2t-\frac{4^2\gamma''}{2.3}\text{ sen }4t-\frac{6^2\gamma'''}{2.3}\text{ sen }6t-\text{ec.}$$

$$\frac{d^3.(\Phi t)^4}{2.3.4\,dt^3} = + \frac{2^3\delta'}{2.3.4}\,\text{sen}\,2t + \frac{4^3\delta''}{2.3.4}\,\text{sen}\,4t + \frac{6^3\delta'''}{2.3.4}\,\text{sen}\,6t + \text{ec.}$$

$$\frac{d^4.(\Phi t)^5}{2.3.4.5\,dt^4} = + \frac{2^4\varepsilon'}{2.3.4.5}\,\text{sen}\,2t + \frac{4^4\varepsilon''}{2.3.4.5}\,\text{sen}\,4t + \frac{6^4\varepsilon'''}{2.3.4.5}\,\text{sen}\,6t + \text{ec.}$$

ec.

Onde facendo

$$a' = -\alpha' - \frac{2\beta'}{2} + \frac{2^2\gamma'}{2.3} + \frac{2^3\delta'}{2.3.4} - \frac{2^4\varepsilon'}{2.3.4.5} - \frac{2^5\zeta'}{2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

$$a'' = -\alpha'' - \frac{4\beta''}{2} + \frac{4^2\gamma''}{2.3} + \frac{4^3\delta''}{2.3.4} - \frac{4^4\varepsilon''}{2.3.4.5} - \frac{4^5\zeta''}{2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

$$a''' = -\alpha''' - \frac{6\beta'''}{2} + \frac{6^2\gamma'''}{2.3} + \frac{6^3\delta'''}{2.3.4} - \frac{6^4\varepsilon'''}{2.3.4.5} - \frac{6^5\zeta'''}{2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

ec.

si otterrà (§ 44)

$$V = t + a'\,\text{sen}\,2t + a''\,\text{sen}\,4t + a'''\,\text{sen}\,6t + \text{ec.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Ora essendo

$$t = \omega + V' + \Phi V'$$

sarà generalmente per qualunque numero i

$$\text{sen}\,it = \text{sen}\,i(\omega + V' + \Phi V')$$

$$= \text{sen}\,i(\omega + V')\left[1 - \frac{i^2}{2}.\Phi V'^2 + \frac{i^4}{2.3.4}.\Phi V'^4 - \frac{i^6}{2.3.4.5.6}.\Phi V'^6 + \text{ec.}\right]$$

$$+ \cos i(\omega + V')\left[i.\Phi V' - \frac{i^3}{2.3}.\Phi V'^3 + \frac{i^5}{2.3.4.5}.\Phi V'^5 - \text{ec.}\ldots\right]$$

e si avrà (§§ 44, 45)

$$\Phi V' = \alpha'\,\text{sen}\,2V' + \alpha''\,\text{sen}\,4V' + \alpha'''\,\text{sen}\,6V' + \text{ec.}$$

$$\Phi\, V'^2 = \beta + \beta' \cos 2V' + \beta'' \cos 4V' + \beta''' \cos 6V' + \text{ec.}$$

$$\Phi\, V'^3 = \gamma' \,\text{sen}\, 2V' + \gamma'' \,\text{sen}\, 4V' + \gamma''' \,\text{sen}\, 6V' + \text{ec.}$$

$$\Phi\, V'^4 = \delta + \delta' \cos 2V' + \delta'' \cos 4V' + \delta''' \cos 6V' + \text{ec.}$$

ec.

Sostituendo questi valori, otterremo

$$\text{sen}\, i t = \text{sen}\, i(\omega + V')\left[1 - \frac{i^2}{2}.\beta + \frac{i^4}{2.3.4}.\delta - \frac{i^6}{2.3.4.5.6}.\zeta + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{sen}(i\omega + (i+2)V')\left[\frac{i}{2}\alpha' - \frac{i^2}{2^2}.\beta' - \frac{i^3}{2^2.3}.\gamma' + \frac{i^4}{2^2.3.4}.\delta' + \frac{i^5}{2^2.3.4.5}.\varepsilon' - \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{sen}(i\omega + (i-2(V')\left[-\frac{i}{2}\alpha' - \frac{i^2}{2^2}.\beta' + \frac{i^3}{2^2.3}\gamma' + \frac{i^4}{2^2.3.4}\delta' - \frac{i^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon' - \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{sen}(i\omega + (i+4)V')\left[\frac{i}{2}\alpha'' - \frac{i^2}{2^2}.\beta'' - \frac{i^3}{2^2.3}.\gamma'' + \frac{i^4}{2^2.3.4}.\delta'' + \frac{i^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon'' - \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{sen}(i\omega + (i-4)V')\left[-\frac{i}{2}\alpha'' - \frac{i^2}{2^2}.\beta'' + \frac{i^3}{2^2.3}.\gamma'' + \frac{i^4}{2^2.3.4}.\delta'' - \frac{i^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon'' - \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{sen}(i\omega + (i+6)V')\left[\frac{i}{2}\alpha''' - \frac{i^2}{2^2}.\beta''' - \frac{i^3}{2^2.3}\gamma''' + \frac{i^4}{2^2.3.4}\delta''' + \frac{i^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon''' - \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{sen}(i\omega + (i-6)V')\left[-\frac{i}{2}\alpha''' - \frac{i^2}{2^2}.\beta''' + \frac{i^3}{2^2.3}\gamma''' + \frac{i^4}{2^2.3.4}\delta''' - \frac{i^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon''' - \text{ec.}\right]$$

$+$ ec.

Quindi facendo successivamente $i = 2$, $i = 4$, $i = 6$, ec. si avranno i valori di sen $2t$, sen $4t$, sen $6t$, ec. cosicchè se, per brevità, ponghiamo

$$A = 1 - \frac{2^2}{2}\beta + \frac{2^4}{2.3.4}\delta - \frac{2^6}{2.3.4.5.6}\zeta + \text{ec.}$$

$$A' = \frac{2}{2}\alpha' - \frac{2^2}{2^2}\beta' - \frac{2^3}{2^2.3}\gamma' + \frac{2^4}{2^2.3.4}\delta' + \frac{2^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon' - \text{ec.}$$

$$A'' = \frac{2}{2}\alpha'' - \frac{2^2}{2^2}\beta'' - \frac{2^3}{2^2.3}\gamma'' + \frac{2^4}{2^2.3.4}\delta'' + \frac{2^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon'' - \text{ec.}$$

$$A''' = \frac{2}{2}\alpha''' - \frac{2^2}{2^2}\beta''' - \frac{2^3}{2^2.3}\gamma''' + \frac{2^4}{2^2.3.4}\delta''' + \frac{2^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon''' - \text{ec.}$$

ec.

$$A^{(')} = -\frac{2}{2}\alpha' - \frac{2^2}{2^2}\beta' + \frac{2^3}{2^2.3}\gamma' + \frac{2^4}{2^2.3.4}\delta' - \frac{2^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon' - \text{ec.}$$

$$A^{('')} = -\frac{2}{2}\alpha'' - \frac{2^2}{2^2}\beta'' + \frac{2^3}{2^2.3}\gamma'' + \frac{2^4}{2^2.3.4}\delta'' - \frac{2^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon'' - \text{ec.}$$

$$A^{(''')} = -\frac{2}{2}\alpha''' - \frac{2^2}{2^2}\beta''' + \frac{2^3}{2^2.3}\gamma''' + \frac{2^4}{2^2.3.4}\delta''' - \frac{2^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon''' - \text{ec.}$$

ec.

$$B = 1 - \frac{4^2}{2}\beta + \frac{4^4}{2.3.4}\delta - \frac{4^6}{2.3.4.5.6}\zeta + \text{ec.}$$

$$B' = \frac{4}{2}\alpha' - \frac{4^2}{2^2}\beta' - \frac{4^3}{2^2.3}\gamma' + \frac{4^4}{2^2.3.4}\delta + \frac{4^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon' - \text{ec.}$$

$$B'' = \frac{4}{2}\alpha'' - \frac{4^2}{2^2}\beta'' - \frac{4^3}{2^2.3}\gamma'' + \frac{4^4}{2^2.3.4}\delta'' + \frac{4^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon'' - \text{ec.}$$

$$B''' = \frac{4}{2}\alpha''' - \frac{4^2}{2^2}\beta''' - \frac{4^3}{2^2.3}\gamma''' + \frac{4^4}{2^2.3.4}\delta''' + \frac{4^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon''' - \text{ec.}$$

ec.

$$B^{(')} = -\frac{4}{2}\alpha' - \frac{4^2}{2^2}\beta' + \frac{4^3}{2^2.3}\gamma' + \frac{4^4}{2^2.3.4}\delta' - \frac{4^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon' - \text{ec.}$$

$$B^{('')} = -\frac{4}{2}\alpha'' - \frac{4^2}{2^2}\beta'' + \frac{4^3}{2^2.3}\gamma'' + \frac{4^4}{2^2.3.4}\delta'' - \frac{4^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon'' - \text{ec.}$$

$$B^{(''')} = -\frac{4}{2}\alpha''' - \frac{4^2}{2^2}\beta''' + \frac{4^3}{2^2.3}\gamma''' + \frac{4^4}{2^2.3.4}\delta''' - \frac{4^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon''' - \text{ec.}$$

ec.

$$C = 1 - \frac{6^2}{2}\beta + \frac{6^4}{2.3.4}\delta - \frac{6^6}{2.3.4.5.6}\zeta + \text{ec.}$$

$$C' = \frac{6}{2}\alpha' - \frac{6^2}{2^2}\beta' - \frac{6^3}{2^2.3}\gamma' + \frac{6^4}{2^2.3.4}\delta' + \frac{6^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon' - \text{ec.}$$

$$C'' = \frac{6}{2}\alpha'' - \frac{6^2}{2^2}\beta'' - \frac{6^3}{2^2.3}\gamma'' + \frac{6^4}{2^2.3.4}\delta'' + \frac{6^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon'' - \text{ec.}$$

$$C''' = \frac{6}{2}\alpha''' - \frac{6^2}{2^2}\beta''' - \frac{6^3}{2^2.3}\gamma''' + \frac{6^4}{2^2.3.4}\delta''' + \frac{6^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon''' - \text{ec.}$$

ec.

$$C^{(')} = -\frac{6}{2}\alpha' - \frac{6^2}{2^2}\beta' + \frac{6^3}{2^2.3}\gamma' + \frac{6^4}{2^2.3.4}\delta' - \frac{6^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon' - \text{ec.}$$

$$C^{('')} = -\frac{6}{2}\alpha'' - \frac{6^2}{2^2}\beta'' + \frac{6^3}{2^2.3}\gamma'' + \frac{6^4}{2^2.3.4}\delta'' - \frac{6^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon'' - \text{ec.}$$

$$C^{(''')} = -\frac{6}{2}\alpha''' - \frac{6^2}{2^2}\beta''' + \frac{6^3}{2^2.3}\gamma''' + \frac{6^4}{2^2.3.4}\delta''' - \frac{6^5}{2^2.3.4.5}\varepsilon''' - \text{ec.}$$

ec. ec.

risulterà finalmente il cercato valore dell' angolo V, che sarà

$$\begin{aligned} V = V' + \omega &+ \alpha' \operatorname{sen} 2V' + \alpha'' \operatorname{sen} 4V' + \alpha''' \operatorname{sen} 6V' + \text{ec.} \\ &+ a'A \operatorname{sen} 2(V'+\omega) + a''B \operatorname{sen} 4(V'+\omega) + a'''C \operatorname{sen} 6(V'+\omega) + \text{ec.} \\ &+ a'A' \operatorname{sen} 2(2V'+\omega) + a''B' \operatorname{sen} 2(3V'+2\omega) + a'''C' \operatorname{sen} 2(4V'+3\omega) + \text{ec.} \\ &+ a'A^{(')} \operatorname{sen} 2\omega \quad + a''B^{(')} \operatorname{sen} 2(V'+2\omega) + a'''C^{(')} \operatorname{sen} 2(2V'+3\omega) + \text{ec.} \end{aligned}$$

$$+a'A''\text{sen}\,2(3V'+\omega)+a''B''\text{sen}\,2(4V'+2\omega)+a'''C''\text{sen}\,2(5V'+3\omega)+\text{ec.}$$
$$+a'A^{(\prime\prime)}\text{sen}\,2(\omega-V')+a''B^{(\prime\prime)}\text{sen}\,4\omega \qquad +a'''C^{(\prime\prime)}\text{sen}\,2(V+3\omega)+\text{ec.}$$
$$+a'A'''\text{sen}\,2(4V'+\omega)+a''B'''\text{sen}\,2(5V'+2\omega)+a'''C'''\text{sen}\,2(6V+3\omega)+\text{ec.}$$
$$+a'A^{(\prime\prime\prime)}\text{sen}\,2(\omega-2V')+a''B^{(\prime\prime\prime)}\text{sen}\,2(2\omega-V')+a'''C^{(\prime\prime\prime)}\text{sen}\,6\omega \qquad +\text{ec.}$$
$$+\text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

47. Il secondo membro di questa equazione è formato da funzioni note di V', ω, p', e queste quantità si determinano facilmente (§§ 42, 44) per mezzo dei tre dati elementi P, λ, ζ. Si otterrà per tanto l'angolo V, da cui mediante la formola

$$\text{sen}\,\phi' = \text{sen}\,p'\,\text{sen}\,V$$

si ricaverà la latitudine ϕ' nella sfera inscritta, ed a questa si troverà (§ 33) la corrispondente latitudine ϕ nello sferoide elittico.

48. Se gli angoli V, V' si vogliono espressi in gradi e decimali di grado, tutti i termini del secondo membro della trovata equazione (§ 46), eccettuato V' si moltiplicheranno per $\frac{180}{\pi}$; e se V, V' si vogliono espressi in minuti secondi, i detti termini si moltiplicherano per $\frac{180}{\pi}.\,60^2 = \frac{1}{\text{sen}\,1''}$.

49. Egli è da notarsi ancora che l'espressione precedente di V ha luogo nel caso che la latitudine cercata ϕ sia maggiore della latitudine data λ; se in vece fosse $\phi < \lambda$, bisognerebbe prendere ω negativamente (§ 21).

50. Un esempio servirà a rischiarare la trovata so-

luzione del problema. Conservando le date denominazioni (§ 44) delle lettere α, α', α'', α''', α^{IV}, propongasi di ricavare il valore dell' angolo V dall' equazione

$$\omega = V - V' + \alpha'(\text{sen}\,2\,V - \text{sen}\,2\,V') + \alpha''(\text{sen}\,4\,V - \text{sen}\,4\,V') + \alpha'''(\text{sen}\,6\,V - \text{sen}\,6\,V') + \alpha^{\text{IV}}(\text{sen}\,8\,V - \text{sen}\,8\,V')$$

nella quale non si tien conto che delle quantità inferiori all' ordine quinto di α', o sia dell' ordine decimo della eccentricità, cosicchè nel valore di V si dovranno ritenere i soli termini moltiplicati nelle seguenti quantità

$$\alpha';\ \alpha'',\ \alpha'^2;\ \alpha''',\ \alpha'^3,\ \alpha'\,\alpha'';\ \alpha^{\text{IV}},\ \alpha'^4,\ \alpha'\,\alpha''',\ \alpha'^2\,\alpha'',\ \alpha''^2.$$

Avremo in primo luogo (§ 45)

$\beta = \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{\alpha''^2}{2}$		$\delta = \frac{3\,\alpha'^4}{2^3}$
$\beta' = \alpha'\,\alpha''$	$\gamma' = \frac{3\,\alpha'^3}{2^2}$	$\delta' = 0$
$\beta'' = -\frac{\alpha'^2}{2} + \alpha'\,\alpha'''$	$\gamma'' = 3\,\alpha'^2\,\alpha''$	$\delta'' = -\frac{4\,\alpha'^4}{2^3}$
$\beta''' = -\alpha'\,\alpha''$	$\gamma''' = -\frac{\alpha'^3}{2^2}$	$\delta''' = 0$
$\beta^{\text{IV}} = -\frac{\alpha''^2}{2} - \alpha'\,\alpha'''$	$\gamma^{\text{IV}} = -\frac{3\,\alpha'^2\,\alpha''}{2^2}$	$\delta^{\text{IV}} = \frac{\alpha'^4}{2^3}$

Ed in seguito (§ 46)

$$a' = -\alpha' - \alpha'\,\alpha'' + \frac{\alpha'^3}{2}$$

$$a'' = -\alpha'' + \alpha'^2 - 2\,\alpha'\,\alpha''' + 4\,\alpha'^2\,\alpha'' - \frac{4}{3}\,\alpha'^4$$

$$a''' = -\alpha''' + 3\,\alpha'\,\alpha'' - \frac{3}{2}\,\alpha'^3$$

$$a^{IV} = -\alpha^{IV} + 2\,\alpha''^2 + 4\,\alpha'\,\alpha''' - 8\,\alpha'^2\,\alpha'' + \frac{8}{3}\,\alpha'^4$$

$$A = 1 - \alpha'^2$$

$$A' = \alpha' - \alpha'\,\alpha'' - \frac{\alpha'^3}{2} \qquad A^{(\prime)} = -\alpha' - \alpha'\alpha'' + \frac{\alpha'^3}{2}$$

$$A'' = \alpha'' + \frac{\alpha'^2}{2} \qquad A^{(\prime\prime)} = -\alpha'' + \frac{\alpha'^2}{2}$$

$$A''' = \alpha''' + \alpha'\,\alpha'' + \frac{\alpha'^3}{2.3} \qquad A^{(\prime\prime\prime)} = -\alpha''' + \alpha'\,\alpha'' - \frac{\alpha'^3}{2.3}$$

$$B = 1 - 4\,\alpha'^2$$

$$B' = 2\,\alpha' \qquad B^{(\prime)} = -2\,\alpha'$$

$$B'' = 2\,\alpha'' + 2\,\alpha'^2 \qquad B^{(\prime\prime)} = -2\,\alpha'' + 2\,\alpha'^2$$

$$C = 1$$

$$C' = 3\,\alpha' \qquad C^{(\prime)} = -3\,\alpha'$$

$$D = 1$$

Otterremo quindi il valore cercato

$$V = V' + \omega + \alpha'\operatorname{sen} 2V' - \left(\alpha' + \alpha'\alpha'' - \frac{3}{2}\,\alpha'^3\right)\operatorname{sen} 2\,(V' + \omega)$$

$$+ \alpha''\operatorname{sen} 4V' - \left(\alpha'' - \alpha'^2 + 2\,\alpha'\,\alpha''' - 8\,\alpha'^2\,\alpha'' + \frac{16}{3}\,\alpha'^4\right)\operatorname{sen} 4(V' + \omega)$$

$$+\alpha'''\,\text{sen}\,6V' - \left(\alpha''' - 3\alpha'\alpha'' + \frac{3}{2}\alpha'^3\right)\text{sen}\,6\,(V' + \omega)$$

$$+\alpha^{\text{IV}}\,\text{sen}\,8V' - \left(\alpha^{\text{IV}} - 2\alpha''^2 - 4\alpha'\alpha''' + 8\alpha'^2\alpha'' - \frac{8}{3}\alpha'^4\right)\text{sen}\,8\,(V' + \omega)$$

$$-(\alpha'^2 - \alpha'^4)\,\text{sen}\,2\,(2V' + \omega) + (\alpha'^2 - \alpha'^4 + 2\alpha'^2\alpha'')\,\text{sen}\,2\omega$$

$$-\left(\alpha'\alpha'' + \frac{1}{2}\alpha'^3\right)\text{sen}\,2\,(3V' + \omega) + \left(\alpha'\alpha'' - \frac{1}{2}\alpha'^3\right)\text{sen}\,2\,(\omega - V')$$

$$-\left(\alpha'\alpha''' + \alpha'^3\alpha'' + \frac{1}{6}\alpha'^4\right)\text{sen}\,2\,(4V' + \omega) + \left(\alpha'\alpha''' - \alpha'^2\alpha'' + \frac{1}{6}\alpha'^4\right)\text{sen}\,2\,(\omega - 2V')$$

$$-2\,(\alpha'\alpha'' - \alpha'^3)\,\text{sen}\,2\,(3V' + 2\omega) + 2\,(\alpha'\alpha'' - \alpha'^3)\,\text{sen}\,2\,(V' + 2\omega)$$

$$-2\,(\alpha''^2 - \alpha'^4)\,\text{sen}\,2\,(4V' + 2\omega) + 2\,(\alpha''^2 + \alpha'^4)\,\text{sen}\,4\omega$$

$$-3\left(\alpha'\alpha''' - 3\alpha'^2\alpha'' + \frac{3}{2}\alpha'^4\right)\text{sen}\,2(4V' + 3\omega) + 3\left(\alpha'\alpha''' - 3\alpha'^2\alpha''' + \frac{3}{2}\alpha'^4\right)\text{sen}\,2(2V' + 3\omega)$$

51. Si può mettere l' espressione precedente sotto una forma piu comoda per l' uso de' logaritmi, riunendo insieme i seni che hanno lo stesso coefficiente. Fatte le debite riduzioni (*a*), e mettendo per brevità, qualunque sia il numero i,

---

(*a*) Le riduzioni più prolisse sono quelle degli ultimi due termini. La somma de' seni moltiplicati in $\alpha'^2\alpha''$ è

$$8\,\text{sen}\,4\,(V' + \omega) - \text{sen}\,(8V' + 2\omega) + 9\,\text{sen}\,(8V' + 6\omega) + 2\,\text{sen}\,2\omega$$

$$-8\,\text{sen}\,8\,(V' + \omega) + \text{sen}\,(4V' - 2\omega) - 9\,\text{sen}\,(4V' + 6\omega) - 4\,\text{sen}\,4\omega$$

Ora essendo

$$8\,\text{sen}\,4\,(V' + \omega) - 8\,\text{sen}\,8\,(V' + \omega) = -16\cos 6\,(V' + \omega)\,\text{sen}\,2\,(V' + \omega)$$

$$-\text{sen}\,(8V' + 2\omega) + \text{sen}\,(4V' - 2\omega) = -2\cos 6V'\,\text{sen}\,2\,(V' + \omega)$$

$$9\,\text{sen}\,(8V' + 6\omega) - 9\,\text{sen}\,(4V' + 6\omega) = 18\cos 6\,(V' + \omega)\,\text{sen}\,2V'$$

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{sen}\, 2\, i\, V('+\omega) - \mathrm{sen}\, 2\, i\, V'\Big] = \mathrm{sen}\, i\,\omega \cos i\,(2V'+\omega) = [i].$$

avremo

$2\,\mathrm{sen}\, 2\,\omega = 2\,\mathrm{sen}\, 2\,(V'+\omega)\cos 2\,V' - 2\cos 2\,(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\, 2\,V'$

La detta somma sarà

$$-16\cos 6(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,2(V'+\omega) - 2\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)\cos 6\,V' + 18\cos 6\,(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,2V'$$

$$+2\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)\cos 2\,V' - 2\cos 2\,(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,2\,V' - 4\,\mathrm{sen}\,4\omega$$

$$= -16\cos 6(V'+\omega)\,[\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega) - \mathrm{sen}\,2\,V'] - 4\,\mathrm{sen}\,4\omega$$

$$-8\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,2\,V'\,[\mathrm{sen}\,2\,(V+\omega)\cos 2\,(V'+\omega) - \mathrm{sen}\,2\,V'\cos 2\,V']$$

$$= -4\,\Big\{ 8\,[1]\cos 6\,(V'+\omega) + 2\,[2]\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,2\,V' + \mathrm{sen}\,4\,\omega \Big\}$$

Similmente la somma de' seni moltiplicati in α'^4 sarà

$$\frac{8}{3}\mathrm{sen}\,8\,(V'+\omega) - \frac{9}{2}\mathrm{sen}(8\,V'+6\omega) + 2\,\mathrm{sen}\,(8\,V'+4\omega) - \frac{1}{6}\mathrm{sen}\,(8\,V'+2\omega) + \mathrm{sen}\,(4\,V'+2\,\omega)$$

$$-\frac{16}{3}\mathrm{sen}\,4(V'+\omega) + \frac{9}{2}\,\mathrm{sen}\,(4\,V'+6\,\omega) + 2\,\mathrm{sen}\,4\,\omega - \frac{1}{6}\mathrm{sen}\,(4\,V'-2\,\omega) - \mathrm{sen}\,2\,\omega$$

$$= \frac{16}{3}\mathrm{sen}\,4\,(V'+\omega)\,[\cos 4\,(V'+\omega) - 1] - 9\cos 6(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,2\,V' + 4\,\mathrm{sen}\,4\,(V'+\omega)\cos 4\,V'$$

$$-\frac{1}{3}\cos 2\,(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,6\,V' + 2\cos 2\,(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,2\,V'$$

$$= \cos 2(V'+\omega)\,\Big\{ -\frac{64}{3}\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)^3 + 36\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)^2\,\mathrm{sen}\,2\,V' - 16\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,2\,V'^2$$

$$+\frac{4}{3}\mathrm{sen}\,2\,V'^3 + 8\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega) - 8\,\mathrm{sen}\,2\,V' \Big\}$$

$$= \frac{4}{3}\cos 2\,(V'+\omega)\,\Big\{ -16\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)^2 + 11\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)\,\mathrm{sen}\,2\,V'$$

$$+6 - \mathrm{sen}\,2\,V'^2 \Big\}\,[\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega) - \mathrm{sen}\,2\,V']$$

$$= \frac{8}{3}\,[1]\cos 2\,(V'+\omega)\,\Big\{ -10\,\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega)\,[\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega) - \mathrm{sen}\,2\,V']$$

$$+\mathrm{sen}\,2\,V'\,[\mathrm{sen}\,2\,(V'+\omega) - \mathrm{sen}\,2\,V'] + 6\cos 2\,(V'+\omega)^2 \Big\}$$

$$V=V'+\omega-2\alpha'[1]-2\alpha''[2] \qquad -2\alpha'''[3]$$

$$+2^2\alpha'^2[1]\cos 2(V'+\omega)+2^2\alpha'\alpha''\left\{2[1]\cos 4(V'+\omega)+[2]\cos 2(V'+\omega)\right\}$$

$$-2^3\alpha'^3\left\{[1]\cos 2(V'+\omega)^2-[1]^2\text{sen}\, 2(V'+\omega)\right\}$$

$$-2\alpha^{IV}[4]$$

$$+2^2\alpha'\alpha'''\left\{3[1]\cos 6(V'+\omega)+[3]\cos 2(V'+\omega)\right\}$$

$$+2^3\alpha''^2[2]\cos 4(V'+\omega)$$

$$-2^2\alpha'^2\alpha''\left\{2^3[1]\cos 6(V'+\omega)+2[2]\sin 2(V'+\omega)\sin 2V'+\sin 4\omega\right\}$$

$$+\frac{2^3}{3}\alpha'^4\left\{6[1]\cos 2(V'+\omega)^3-9[1]^2\sin 4(V'+\omega)-4[1]^3\cos 2(V'+\omega)\right\}$$

In questa e nella precedente (§ 50) espressione di V si prenderà ω negativamente (§ 49) se la latitudine cercata ϕ è minore della latitudine data λ.

52. Ancorchè l'espressione di V trovata in quest' esempio non sia che un caso particolare e limitato della formola generale (§ 46), essa però è molto più estesa di tutte quelle che finora sono state pubblicate. Generalmente si sono trascurati i termini moltiplicati nella quarta e nelle più alte potenze dell' eccentricità, ed il solo rinomato geometra *Le Gendre* ha tenuto conto an-

---

$$=\frac{16}{3}[1]\cos 2(V'+\omega)\left\{3\cos 2(V'+\omega)^2+[1](-10\,\text{sen}\, 2(V'+\omega)+\text{sen}\, 2V')\right\}$$

$$=16\left\{[1]\cos 2(V'+\omega)^3-\frac{3}{2}\cdot[1]^2\,\text{sen}\, 4(V'+\omega)-\frac{2}{3}\cdot[1]^3\cos 2(V'+\omega)\right\}$$

che della quarta potenza. Siccome egli non ha dato la dimostrazione della sua formola, non sarà inopportuno il ricavarla dalla precedente.

53. Ritenendo solamente i termini del second' ordine di α', e prendendo ω negativamente, poichè *Le Gendre* suppone $\varphi < \lambda$, avremo (§ 51)

$$V' - V = \omega + 2\alpha'[1] + 2\alpha''[2] - 4\alpha'^2[1]\cos 2(V' - \omega)$$

o sia

$$\begin{aligned} V' - V = \omega &- 2\alpha' \operatorname{sen}\omega \cos(2V' - \omega) \\ &- 2\alpha'' \operatorname{sen} 2\omega \cos 2(2V' - \omega) \\ &+ 4\alpha'^2 \operatorname{sen}\omega \cos(2V' - \omega)\cos 2(V' - \omega) \end{aligned}$$

Ora si ha (§ 44)

$$\omega = \frac{P}{1 + Q'}\ ;\ \alpha' = \frac{-R'}{1 + Q'}\ ;\ \alpha'' = \frac{R''}{1 + Q'}$$

ed essendo (§ 36)

$$Q' = \frac{1}{4}\Delta^2 \cos p'^2 - \frac{3}{64}\Delta^4 \cos p'^4$$

$$Q'' = -\frac{1}{32}\Delta^4 \cos p'^4$$

$$R' = \frac{1}{8}\Delta^2 \cos p'^2 - \frac{1}{32}\Delta^4 \cos p'^4$$

$$R'' = -\frac{1}{256}\Delta^4 \cos p'^4$$

otterremo

$$\omega = P(1 - Q' + Q'^2) = P\left(1 - \frac{1}{4}\Delta^2 \cos p'^2 + \frac{7}{64}\Delta^4 \cos p'^4\right)$$

$$\alpha' = -R'(1 - Q') = -\frac{1}{8}\Delta^2 \cos p'^2 + \frac{1}{16}\Delta^4 \cos p'^4$$

$$\alpha'' = R'' = -\frac{1}{256}\Delta^4 \cos p'^4$$

Quindi se noi prendiamo le denominazioni di *Le Gendre*, facendo $P = \frac{D}{b}$;

$V' = 90^\circ - q$; $V = 90^\circ - q - y$; cosicchè sia (§§ 35, 36)

$$\text{sen } V' = \cos q = \frac{\text{sen } \lambda'}{\cos p'}$$

$$\text{sen } V = \cos(q + y) = \frac{\text{sen } \phi'}{\cos p'}$$

e posto in oltre (§ 22)

$1 + \Delta^2 = (1 + \alpha)^2$; o sia $\Delta^2 = 2\alpha + \alpha^2$

ne risulterà

$$\omega = \frac{D}{b}\left[1 - \frac{\alpha}{2}\cos p'^2 - \frac{\alpha^2}{4}\cos p'^2\left(1 - \frac{7}{4}\cos p'^2\right)\right]$$

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{4}\cos p'^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\cos 2p'\right)$$

$$\alpha'' = -\frac{\alpha^2}{64}\cos p'^4$$

E la formola precedente diventerà

$$y = \omega - \frac{\alpha}{2}\cos p'^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\cos 2p'\right)\text{sen}\,\omega\cos(2q + \omega)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{32}\cos p'^4\,\text{sen}\,2\omega\cos 2(2q + \omega)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{4}\cos p'^4\,\text{sen}\,\omega\cos(2q + \omega)\cos 2(q + \omega)$$

che è appunto quella di *Le Gendre* (*a*).

54. Dalla sola ispezione delle equazioni (§§ 16, 17) esprimenti un arco del meridiano per mezzo delle due latitudini φ, λ si vede tosto, che la loro forma è interamente eguale a quella dell' equazione (15) (§ 36). Egli è dunque evidente che, dato l'arco del meridiano LM (Fig. I.) compreso fra due punti L, M, e data la latitudine λ di un punto, si otterrà la latitudine φ dell' altro punto colla formola (18). Onde se, per esempio, si prende la seconda (§ 17) delle dette equazioni, e si trascurano la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità, posto $\frac{LM}{b} = P'$, ed in oltre

$$\omega' = \frac{P'}{\text{sen}\,1''}\left[1 - \frac{1}{4}\Delta^2 + \frac{7}{64}\Delta^4\right]$$

si avrà

$$\varphi = \lambda \pm \omega' \pm \left(\frac{3}{4}\Delta^2 - \frac{3}{8}\Delta^4\right)\frac{\text{sen}\,\omega'\cos(2\lambda \pm \omega')}{\text{sen}\,1''}$$

$$\mp \frac{15}{128}\Delta^4\frac{\text{sen}\,2\omega'\cos 2(2\lambda \pm \omega')}{\text{sen}\,1''}$$

$$\pm \frac{9}{16}\Delta^4\frac{\text{sen}\,\omega'\cos(2\lambda \pm \omega')\cos 2(\lambda \pm \omega')}{\text{sen}\,1''}$$

(*a*) *Mémoires de l' Academie Royale des Sciences de Paris. Année 1787. pag. 368.*

Il segno superiore avrà luogo quando $\phi > \lambda$, e l' inferiore quando $\phi < \lambda$.

55. Anche l' equazione trovata (§ 28) nel caso, che la via brevissima LM (Fig. II) sia perpendicolare al meridiano, cioè

$$P = g\,(90^\circ - v) + A \operatorname{sen} 2v - B \operatorname{sen} 4v + C \operatorname{sen} 6v - \text{ec.}$$

è omologa all' equazione (15), e se ne potrà ricavare l' angolo v espresso in funzione di $\frac{P}{g}$ e della latitudine λ. In fatti supponendo

$$t = 90^\circ - \frac{P}{g}$$

$$\alpha' = -\frac{A}{g}\,;\ \alpha'' = \frac{B}{g}\,;\ \alpha''' = -\frac{C}{g}\,;\ \text{ec.}$$

essa diventerà

$$t = v + \alpha' \operatorname{sen} 2v + \alpha'' \operatorname{sen} 4v + \alpha''' \operatorname{sen} 6v + \text{ec.}$$

Ritenendo pertanto le denominazioni sopra (§ 46) date di a', a'', a''' ec. avremo

$$v = t + a' \operatorname{sen} 2t + a'' \operatorname{sen} 4t + a''' \operatorname{sen} 6t + \text{ec.}$$

o sia, posto $\frac{P}{g} = \omega''$,

$$90^\circ - v = \omega'' - a' \operatorname{sen} 2\omega'' + a'' \operatorname{sen} 4\omega'' - a''' \operatorname{sen} 6\omega'' + \text{ec.}$$

Se si trascurano la decima e le più alte potenze dell' eccentricità, si avrà (§ 50)

$$90^\circ - v = \omega'' + \left(\alpha' + \alpha'\alpha'' - \frac{\alpha'^3}{3}\right) \text{sen } 2\,\omega''$$
$$-\left(\alpha'' - \alpha'^2 + 2\,\alpha'\alpha''' - 4\,\alpha'^2\alpha'' + \frac{4}{3}\alpha'^4\right) \text{sen } 4\,\omega''$$
$$+\left(\alpha''' - 3\,\alpha'\alpha'' + \frac{3}{2}\alpha'^3\right) \text{sen } 6\,\omega''$$
$$-\left(\alpha^{\text{IV}} - 2\alpha''^2 - 4\alpha'\alpha''' + 8\alpha'^2\alpha'' - \frac{8}{3}\alpha'^4\right) \text{sen } 8\,\omega''.$$

Se poi non si ritengono che i termini moltiplicati nel quadrato e nella quarta potenza dell' eccentricità, essendo (§ 28)

$$g = 1 + \frac{1}{4}\Delta^2 \text{ sen } \lambda^2 - \frac{1}{64}\Delta^4 \text{ sen } \lambda^2 (3 + 13 \cos \lambda^2)$$

$$g' = \frac{3}{4}\Delta^2 \text{ sen } \lambda^2 + \frac{3}{64}\Delta^4 \text{ sen } \lambda^2 (1 - 17 \cos \lambda^2)$$

$$g'' = \frac{15}{32}\Delta^4 \text{ sen } \lambda^4$$

$$A = \frac{3}{8}\Delta^2 \text{ sen } \lambda^2 - \frac{3}{32}\Delta^4 \text{ sen } \lambda^2 (1 + 3 \cos \lambda^2)$$

$$B = \frac{15}{256}\Delta^4 \text{ sen } \lambda^4$$

e per conseguenza

$$\omega'' = \frac{P}{g} = P\left[1 - \frac{1}{4}\Delta^2 \text{ sen } \lambda^2 + \frac{1}{64}\Delta^4 \text{ sen } \lambda^2 (7 + 9 \cos \lambda^2)\right]$$

$$\alpha' = -\frac{A}{g} = -\frac{3}{8}\Delta^2 \text{ sen } \lambda^2 + \frac{3}{16}\Delta^4 \text{ sen } \lambda^2 (1 + \cos \lambda^2)$$

$$\alpha'' = \frac{B}{g} = \frac{15}{256}\Delta^4 \text{ sen } \lambda^4$$

si avrà

$$90^\circ - \upsilon = \omega'' - \left[\frac{3}{8}\Delta^2 \operatorname{sen}\lambda^2 - \frac{3}{16}\Delta^4 \operatorname{sen}\lambda^2(1+\cos\lambda^2)\right]\operatorname{sen}2\omega''$$

$$+\frac{21}{256}\Delta^4 \operatorname{sen}\lambda^4 \operatorname{sen}4\omega''.$$

Nella quale equazione si moltiplicherà ω'' e ciascun termine del secondo membro per $\frac{180}{\pi}\cdot 60^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}1''}$ se si vuol esprimere l'angolo $90^\circ - \upsilon$ in minuti secondi.

56. Il metodo con cui abbiamo ricavato l' angolo V dall' equazione (15) si potrebbe egualmente usare per ottenere l' angolo υ dall' equazione (6), (§ 24). Ma per non allungare più oltre queste ricerche sopra un solo problema, di cui abbiamo già trovato (§§. 43, e seg.) una soluzione completa, ci contenteremo di determinare l' angolo υ nel caso che si trascurino la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità. Il valore di P in questo caso è

$$P = g(\upsilon - \upsilon') - A(\operatorname{sen}2\upsilon - \operatorname{sen}2\upsilon') + B(\operatorname{sen}4\upsilon - \operatorname{sen}4\upsilon')$$

$$-K'\cos\upsilon'^2(\operatorname{tang}\upsilon - \operatorname{tang}\upsilon') + K''\cos\upsilon'^4\left(\frac{\operatorname{tang}\upsilon}{\cos\upsilon^2} - \frac{\operatorname{tang}\upsilon'}{\cos\upsilon'^2}\right)$$

e si ha (§ 27)

$$g = 1 + \frac{1}{4}\Delta^2\cos p^2 - \frac{3}{64}\Delta^4(\cos p^4 + \frac{16}{3}\operatorname{sen}p^2\operatorname{sen}\lambda^2)$$

$$A = \frac{3}{8}\Delta^2\cos p^2 - \frac{3}{32}\Delta^4\cos p^2(1 + 3\operatorname{sen}p^2)$$

$$B = \frac{15}{256}\Delta^4\cos p^4$$

$$K' = \frac{1}{2}\Delta^2 \operatorname{sen} p^2 - \frac{1}{4}\Delta^4 \operatorname{sen} p^2 (\operatorname{sen} p^2 - (1 + \cos p^2) \operatorname{sen} \upsilon'^2)$$

$$K'' = \frac{1}{8}\Delta^4 \operatorname{sen} p^4$$

Facendo pertanto

$$\Omega = \frac{P}{g}\,;\ \alpha' = \frac{A}{g}\,;\ \alpha'' = \frac{B}{g}\,;\ \beta' = \frac{K'}{g}\,;\ \beta'' = \frac{K''}{g}$$

ed inoltre

$$t = \upsilon' + \Omega - \alpha' \operatorname{sen} 2\upsilon' + \alpha'' \operatorname{sen} 4\upsilon' - \beta' \operatorname{sen}\upsilon' \cos\upsilon' + \beta'' \operatorname{sen}\upsilon' \cos\upsilon'$$

e prendendo la funzione $\Phi\,\upsilon$ tale, che sia

$$\Phi\upsilon = -\alpha' \operatorname{sen} 2\upsilon + \alpha'' \operatorname{sen} 4\upsilon - \beta' \cos\upsilon'^2 \operatorname{tang}\upsilon + \beta'' \frac{\cos\upsilon'^4 \operatorname{tang}\upsilon}{\cos\upsilon^2}$$

l' equazione precedente avrà la forma

$$o = t - \upsilon - \Phi\,\upsilon$$

Quindi posta la funzione $\psi\,\upsilon = \upsilon$, cosicchè abbiasi

$\psi\,t = t\,;\ \frac{d\,\psi\,t}{d\,t} = \psi'\,t = 1$, otterremo (§ 43)

$$\upsilon = t - \Phi\,t + \frac{d.\,(\Phi\,t)^2}{2\,d\,t}$$

e sarà

$$\Phi t = -\alpha' \operatorname{sen} 2t + \alpha'' \operatorname{sen} 4t - \beta' \cos\upsilon'^2 \operatorname{tang} t + \beta'' \frac{\cos\upsilon'^4 \operatorname{tang} t}{\cos t^2}$$

$$(\Phi t)^2 = \frac{\alpha'^2}{2} + 2\alpha'\beta' \cos\upsilon'^2 - 2\alpha'\beta' \cos\upsilon'^2 \cos 2t - \frac{\alpha'^2}{2} \cos 4t + \beta'^2 \cos\upsilon'^4 \operatorname{tang} t^2$$

$$\frac{d.\,(\Phi\,t)^2}{2\,d\,t} = 2\,\alpha'\,\beta' \cos\upsilon'^2 \operatorname{sen} 2\,t + \alpha'^2 \operatorname{sen} 4\,t + \beta'^2 \frac{\cos\upsilon'^4 \operatorname{tang} t}{\cos t^2}$$

$$\upsilon = t + \alpha' \operatorname{sen} 2\,t \qquad + 2\,\alpha'\,\beta' \cos \upsilon'^2 \operatorname{sen} 2\,t$$

$$+ \beta' \cos \upsilon'^2 \operatorname{tang} t + (\alpha'^2 - \alpha'') \operatorname{sen} 4\,t$$

$$+ (\beta'^2 - \beta'') \cos \upsilon'^4 \frac{\operatorname{tang} t}{\cos t^2}$$

Sostituendo ora in vece di t il suo valore, e nei due termini $\alpha' \operatorname{sen} 2\,t$, $\beta' \cos \upsilon'^2 \operatorname{tang} t$ i valori

$$\operatorname{sen} 2\,t = \operatorname{sen} 2\,(\upsilon' + \Omega) - (2\,\alpha' + \beta') \operatorname{sen} 2\,\upsilon' \cos 2\,(\upsilon' + \Omega)$$

$$\operatorname{tang} t = \operatorname{tang}(\upsilon' + \Omega) - \frac{(2\,\alpha' + \beta')}{2}\,\frac{\operatorname{sen} 2\,\upsilon'}{\cos(\upsilon' + \Omega)^2}$$

avremo

$$\upsilon = \upsilon' + \Omega - \alpha' \operatorname{sen} 2\,\upsilon' + \alpha'' \operatorname{sen} 4\,\upsilon'$$

$$- \beta' \operatorname{sen} \upsilon' \cos \upsilon' + \beta'' \operatorname{sen} \upsilon' \cos \upsilon'$$

$$+ \alpha' \operatorname{sen} 2\,(\upsilon' + \Omega) - (2\,\alpha'^2 + \alpha'\,\beta') \operatorname{sen} 2\,\upsilon' \cos 2\,(\upsilon' + \Omega)$$

$$+ \beta' \cos \upsilon'^2 \operatorname{tang}(\upsilon' + \Omega) - \frac{(2\,\alpha'\beta' + \beta'^2)}{2}\,\frac{\operatorname{sen} 2\,\upsilon' \cos \upsilon'^2}{\cos(\upsilon' + \Omega)^2}$$

$$+ 2\,\alpha'\,\beta' \cos \upsilon'^2 \operatorname{sen} 2\,(\upsilon' + \Omega)$$

$$+ (\alpha'^2 - \alpha'') \operatorname{sen} 4\,(\upsilon' + \Omega)$$

$$+ (\beta'^2 - \beta'') \cos \upsilon'^4 \frac{\operatorname{tang}(\upsilon' + \Omega)}{\cos(\upsilon' + \Omega)^2}$$

nella quale espressione si dovrà prendere Ω negativamente, se la latitudine cercata φ è minore della latitudine data λ.

57. Quindi riunendo insieme i termini che hanno lo stesso coefficiente, si avrà generalmente

$$v = v' \pm \Omega \pm 2\alpha' \operatorname{sen}\Omega \cos(2v' \pm \Omega) \mp 2\alpha'' \operatorname{sen} 2\Omega \cos 2(2v' \pm \Omega)$$

$$\pm \varepsilon' \frac{\operatorname{sen}\Omega \cos v'}{\cos(v' \pm \Omega)} \qquad \pm 4\alpha'^2 \operatorname{sen}\Omega \cos(2v' \pm \Omega) \cos 2(v' \pm \Omega)$$

$$\pm \varepsilon'^2 \frac{\operatorname{sen}\Omega \cos v'^3}{\cos(v' \pm \Omega)^3}$$

$$+ \varepsilon'' \cos v' \left[\operatorname{sen} v' - \frac{\cos v'^3 \operatorname{sen}(v' \pm \Omega)}{\cos(v' \pm \Omega)^3}\right]$$

$$+ 2\alpha'\varepsilon' \cos v' \left[\operatorname{sen}(v' \pm 2\Omega) - \frac{\operatorname{sen} v' \cos v'^2}{\cos(v' \pm \Omega)^2}\right]$$

e si userà il segno superiore quando $\phi > \lambda$, e l' inferiore quando $\phi < \lambda$. Se gli angoli v, v' sono espressi in minuti secondi, si dovrà moltiplicare tanto Ω quanto ciascun termine del secondo membro, eccettuato v', per $\frac{180}{\pi} \cdot 60^2 = \frac{1}{\operatorname{sen} 1''}$. Dai valori di g, A, B, K', K'' sopra (§ 56) indicati si ricaverà

$$\Omega = \frac{P}{g} = P\left[1 - \frac{1}{4}\Delta^2 \cos p^2 + \frac{1}{64}\Delta^4 (7\cos p^4 + 16 \operatorname{sen} p^2 \operatorname{sen} \lambda^2)\right]$$

$$\alpha' = \frac{A}{g} = \frac{3}{8}\Delta^2 \cos p^2 - \frac{3}{16}\Delta^4 \cos p^2 (1 + \operatorname{sen} p^2)$$

$$\alpha'' = \frac{B}{g} = \frac{15}{256}\Delta^4 \cos p^4$$

$$\varepsilon' = \frac{K'}{g} = \frac{1}{2}\Delta^2 \operatorname{sen} p^2 - \frac{1}{8}\Delta^4 \operatorname{sen} p^2 \left(1 + \operatorname{sen} p^2 - 2\operatorname{sen}\lambda^2 (2 + \operatorname{tang} p^2)\right)$$

$$\varepsilon'' = \frac{K''}{g} = \frac{1}{8}\Delta^4 \operatorname{sen} p^4$$

58. Facendo, nell' espressione precedente di v, l' an-

golo $\zeta = 0$, cosicchè sia $\text{sen}\,p = \text{sen}\,\zeta \cos\lambda = 0$, e quindi $\upsilon' = \lambda$; $\upsilon = \phi$, tutti i termini moltiplicati in ϵ', o in ϵ'', contenendo $\text{sen}\,p^2$, saranno nulli, ed i termini residui moltiplicati in $\frac{180}{\pi} \,.\, 60^\circ = \frac{1}{\text{sen}\,1''}$, e posto $\frac{\Omega}{\text{sen}\,1''} = \omega'$, daranno il valore di ϕ trovato sopra (§ 54). Facendo poi nella medesima espressione di υ (§ 57) l' angolo $\zeta = 90^\circ$, si avrà (§ 28) $\upsilon' = 90^\circ$; $p = 90^\circ - \lambda$, ed i termini, ne' quali entra ϵ', oppure ϵ'', essendo moltiplicati per $\cos\upsilon' = 0$, diventano nulli. Prendendo nei termini residui il segno inferiore (§ 21), e supponendo $\Omega = \omega''$, ne risulterà il valore di $90^\circ - \upsilon$ trovato precedentemente (§ 55) per questo caso.

59. Le equazioni (10), (16), e (18) sopra (§§ 34, 37, 46) esposte ci somministrano la soluzione del seguente problema.

Problema II.

Nel triangolo sferoidico elittico PLM (Fig. II.) formato dai due meridiani PL, PM, e dalla via brevissima LM, che unisce i due punti L, M, sono dati i tre elementi P, λ, ζ, cioè il rapporto della via brevissima al semiasse minore b, ossia $\frac{LM}{b} = P$, la latitudine λ del punto L, e l' azimut $\zeta = PLM$, si cercano gli altri tre elementi, cioè la latitudine ϕ del punto M, la differenza in longitudine $\varpi = LPM$, e l' azimut $LMP = 180^\circ - \theta$.

SOLUZIONE.

Primo. Dalla latitudine data λ nello sferoide si dedurrà la corrispondente latitudine λ' nella sfera inseritta mediante la formola

$$\tang \lambda' = \sqrt{(1 - c^2)} \,.\, \tang \lambda = \frac{\tang \lambda}{\sqrt{(1 + \Delta^2)}},$$

oppure per mezzo dell' equazione (§ 33)

$$\lambda' = \lambda - H \operatorname{sen} 2\lambda + \frac{1}{2} H^2 \operatorname{sen} 4\lambda - \frac{1}{3} H^3 \operatorname{sen} 6\lambda + \text{ec.}$$

In seguito, fatto $\operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} \zeta \cos \lambda'$, si calcoleranno (§ 36) le quantità Q', R', R'', R''' ec. per dedurne i coefficienti

$$\alpha' = -\frac{R'}{1 + Q'}\,;\ \alpha'' = \frac{R''}{1 + Q'}\,;\ \alpha''' = -\frac{R'''}{1 + Q'}\,;\ \text{ec.}$$

Si avranno quindi (§ 46) i valori di a', a'', a''', ec. e di

A, A', A'' ec. $A^{(')}$, $A^{('')}$, ec. B, B', B'', ec. $B^{(')}$, $B^{('')}$, ec. ec.

Determinati inoltre gli angoli V', ω colle formole

$$\operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} \lambda'}{\cos p'}$$

$$\omega = \frac{P}{1 + Q'}$$

si sostituiranno tutti questi valori nell' equazione (18) (§ 46) e se ne otterrà l' angolo V; per mezzo della formola

$$\operatorname{sen} \varphi' = \operatorname{sen} V \cos p'$$

se ne dedurrà la latitudine ϕ' nella sfera inscritta, a cui si troverà la corrispondente latitudine ϕ nello sferoide elittico (§ 33).

Secondo. Si calcoleranno le quantità M. N′, N″, N‴, ec. (§ 37), e gli angoli Z, Z′ per mezzo delle formole

$$\operatorname{tang} Z = \operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V \;;\; \operatorname{tang} Z' = \operatorname{sen} p' \operatorname{tang} V'$$

e sostituendo i trovati valori nell' equazione (16), si avrà la cercata differenza in longitudine ϖ.

Terzo. Finalmente l' azimut si determinerà coll' equazione (10) (§ 34)

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\cos \lambda' \operatorname{sen} \zeta}{\cos \phi'}.$$

60. Siccome le equazioni (18), e (16) possono estendersi a qualunque potenza dell' eccentricità, egli è evidente che la soluzione del problema non è soggetta in questa parte ad alcuna restrizione. Nel caso poi che si trascurino la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità, l' equazione (18) si riduce a quella già trovata (§ 53); e l' equazione (16) sarà (*a*)

(*a*) Se noi facciamo (§ 53),

$$\Delta^2 = 2\alpha + \alpha^2;\; V' = 90^\circ - q;\; V = 90^\circ - q - y;\; Z' = 90^\circ - m;\; Z = 90^\circ - m - x,$$

e prendiamo ϖ negativamente nella supposizione, che la latitudine p sia minore di λ, (§ 21) avremo

$$\varpi = x - \alpha y \operatorname{sen} p' + \alpha^2 y \operatorname{sen} p' \left(1 + \frac{1}{4} \cos p'^2\right) + \frac{\alpha}{4} \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \operatorname{sen} y \cos(2q + y)$$

che è una delle formole di *Le Gendre* (*Mémoires de l' Acad. des Sciences de Paris. Année 1787. pag. 367.*)

$$\varpi = Z - Z' - \left[\frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{8}\Delta^4\left(3 + \frac{1}{2}\cos p'^2\right)\right](V - V')\,\text{sen}\,p'$$

$$- \frac{1}{16}\Delta^4\,\text{sen}\,p'\cos p'^2\,\text{sen}\,(V - V')\cos(V + V')$$

61. Nella stessa ipotesi che si ommettano le potenze dell' eccentricità superiori alla quarta, si potrà ancora prescindere dalla riduzione delle latitudini alla sfera inscritta; e si sostituirà all' equazione (18), quella che si trovò precedentemente (§ 57), ed in vece dell' equazione (16) si userà la formola (7) limitata a questo caso (§ 27). L' azimut si dedurrà dalla formola (1), (§ 20), la quale, sviluppando i radicali, si riduce alla seguente

$$\text{sen}\,\vartheta = \frac{\text{sen}\,\zeta\cos\lambda}{\cos\phi}\left[1 - \frac{1}{2}e^2\,\text{sen}\,(\phi - \lambda)\,\text{sen}\,(\phi + \lambda)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}e^4\text{sen}(\phi - \lambda)\,\text{sen}\,(\phi + \lambda)(\text{sen}\,\phi^2 + 3\,\text{sen}\,\lambda^2)\right]$$

62. Finalmente se, attesa la piccolezza dell' eccentricità, si vuol trascurare anche la sua potenza quarta, la soluzione del problema sarà facilissima, ed il calcolo si potrà ordinare nella seguente maniera: Posto

$\frac{P}{\text{sen}\,1''} = \Omega$, facciasi (§§ 40, 57)

1) $\text{sen}\,p = \text{sen}\,\zeta\cos\lambda$

2) $\text{sen}\,\upsilon' = \frac{\text{sen}\,\lambda}{\cos p}$

3) $\upsilon = \upsilon' \pm \left(1 - \frac{e^2}{4} \cos p^2\right) \Omega$

$$\pm \frac{e^2}{4} \cdot \frac{\cos p^2 \operatorname{sen} \Omega}{\operatorname{sen} 1''} \left[3 \cos (2\upsilon' \pm \Omega) + 2 \frac{\cos \upsilon' \operatorname{tang} p^2}{\cos (\upsilon' \pm \Omega)} \right]$$

Si troverà quindi la latitudine ϕ per mezzo della formola

4) $\operatorname{sen} \phi = \cos p \operatorname{sen} \upsilon$

Pongasi inoltre

5) $\operatorname{tang} z' = \operatorname{sen} p \operatorname{tang} \upsilon'$

6) $\operatorname{tang} z = \operatorname{sen} p \operatorname{tang} \upsilon$

si avrà la differenza in longitudine (§ 27)

7) $\varpi = \pm (z - z') \mp \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} p \left[\upsilon - \upsilon' + \frac{\operatorname{sen} (\upsilon - \upsilon') \cos \upsilon'}{\cos \upsilon \operatorname{sen} 1''} \right]$

e l' azimut si otterrà dalla formola (§ 61)

8) $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \zeta \frac{\cos \lambda}{\cos \phi} \left[1 - \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen} (\phi - \lambda) \operatorname{sen} (\phi + \lambda) \right]$

Il segno superiore nella terza e nella settima equazione ha luogo quando $\phi > \lambda$, e l' inferiore quando $\phi < \lambda$.

63. Avanti di terminare questa prima parte degli elementi di trigonometria sferoidica, gioverà mostrare che le formole precedenti servono ancora a determinare sullo sferoide elittico la longitudine e la latitudine di un punto per mezzo delle sue distanze dalla perpendicolare e dalla meridiana di un altro punto, di cui

sia conosciuta la posizione. Sia nel triangolo sferoidico PNM (Fig. IV) P il polo, N il punto di cui è nota la posizione, e M il punto di cui si cerca la longitudine e la latitudine. Tirando dal punto M un arco ML perpendicolare in L al meridiano PN, sarà per ipotesi conosciuto tanto l' arco ML che misura la distanza di M dalla meridiana di N, quanto l' arco LN del meridiano che misura la distanza di M dalla perpendicolare di N. Ora trascurando la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità, pongasi

$$\frac{\mathrm{LN}}{b} = p'$$

$$\omega' = \frac{p'}{\operatorname{sen} 1''}\left[1 - \frac{1}{4}\Delta^2 + \frac{7}{64}\Delta^4\right]$$

Facciasi inoltre la latitudine conosciuta del punto $\mathrm{N} = \Lambda$, e quella del punto $\mathrm{L} = \lambda$, si avrà (§ 54)

$$\lambda = \Lambda \pm \omega' \pm \left(\frac{3}{4}\Delta^2 - \frac{3}{8}\Delta^4\right)\frac{\operatorname{sen}\omega' \cos(2\Lambda \pm \omega')}{\operatorname{sen} 1''}$$

$$\mp \frac{15}{128}\Delta^4 \frac{\operatorname{sen} 2\omega' \cos 2(2\Lambda \pm \omega')}{\operatorname{sen} 1''}$$

$$\pm \frac{9}{16}\Delta^4 \frac{\operatorname{sen}\omega' \cos(2\Lambda \pm \omega') \cos 2(\Lambda \pm \omega')}{\operatorname{sen} 1''}$$

e si userà il segno superiore quando $\lambda > \Lambda$, e l' inferiore quando $\lambda < \Lambda$.

Posto in seguito $\frac{\mathrm{ML}}{b} = p$

$$\omega''=\frac{P}{\operatorname{sen} 1''}\left[1-\frac{1}{4}\Delta^2 \operatorname{sen}\lambda^2+\frac{1}{64}\Delta^4 \operatorname{sen}\lambda^2(7+9\cos\lambda^2)\right]$$

nel triangolo sferoidico PLM rettangolo in L si avrà l' angolo $\psi=90^\circ-\upsilon$ per mezzo della formola (§ 55)

$$\psi=\omega''-\left[\frac{3}{8}\Delta^2\operatorname{sen}\lambda^2-\frac{3}{16}\Delta^4\operatorname{sen}\lambda^2(1+\cos\lambda^2)\right]\frac{\operatorname{sen}2\omega''}{\operatorname{sen}1''}+\frac{21}{256}\Delta^4\frac{\operatorname{sen}\lambda^4\operatorname{sen}4\omega''}{\operatorname{sen}1''}.$$

Si otterrà quindi la latitudine cercata ϕ del punto M dalla formola

$$\operatorname{sen}\phi=\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\upsilon=\operatorname{sen}\lambda\cos\psi$$

Facendo poi $90^\circ-z=u$, cosicchè sia

$$\operatorname{tang} z=\frac{1}{\operatorname{tang} u}=\cos\lambda\operatorname{tang}\upsilon=\frac{\cos\lambda}{\operatorname{tang}\psi},$$

vale a dire

$$\operatorname{tang} u=\frac{\operatorname{tang}\psi}{\cos\lambda}$$

si otterrà (§ 30) la differenza ϖ in longitudine fra il punto N ed il punto M, che sarà

$$\varpi=u-\left[\frac{1}{2}\Delta^2\cos\lambda-\frac{3}{16}\Delta^4\cos\lambda(1+\cos\lambda^2)\right]\psi-\frac{3}{32}\Delta^4\frac{\cos\lambda\operatorname{sen}\lambda^2\operatorname{sen}2\psi}{\operatorname{sen}1''}.$$

64. Quantunque siasi limitata la soluzione della precedente questione alla quarta potenza dell' eccentricità, egli è visibile che con eguale facilità si potrebbe estendere a qualunque potenza più alta, poichè le formole (§§ 30, 54, 55) dalle quali essa fu ricavata, sono suscettibili di qualunque estensione a questo ri-

guardo. Inoltre ognuno vede che, servendosi delle latitudini nella sfera inscritta, e facendo nell' equazione (18) primo $\zeta = 0$, ed in seguito $\zeta = 90^{\circ}$ tanto nella stessa equazione (18), quanto nell' equazione (16), (§ 37), si poteva ottenere un'altra soluzione completa della questione proposta.

La seconda parte di questi eleménti si darà nel tomo secondo.

Fig. 1.

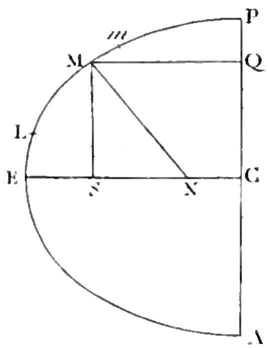


Fig. 3.

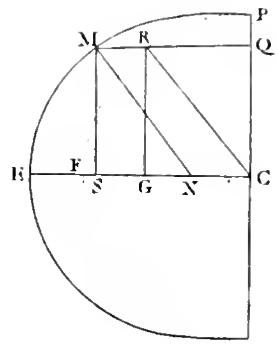


Fig. 2

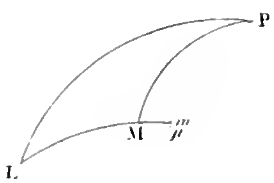
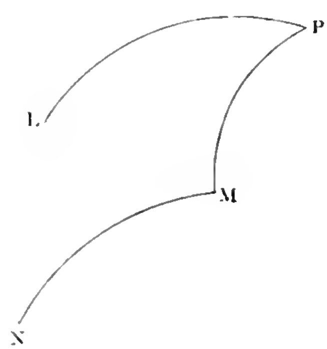


Fig. 4



NUOVE RICERCHE

Dirette a rettificare la teorìa della resistenza de' fluidi e le sue applicazioni

Di Giuseppe Avanzini.

INTRODUZIONE.

La misura della resistenza opposta dai fluidi al movimento dei solidi, ed il punto ove può considerarsi raccolta ed agente tutta la mentovata resistenza, sono gli oggetti delle più importanti investigazioni di molte scienze, come, della fisica, dell' idraulica, della balistica, e della nautica. Perciò nei due ultimi secoli quasi tutti i più illustri coltivatori delle scienze fisico-matematiche a queste rilevanti ricerche rivolsero le loro meditazioni. Così ebbero origine alcune teorìe ed alcune formole analitiche che portano immediatamente alla cognizione della resistenza e del centro di essa.

Ma queste formole giungono poi a quella certezza fisico-matematica che possa togliere qualunque dubbio nei loro usi importanti?

Ecco una questione strettamente connessa ai veri avanzamenti della scienza delle resistenze non ancora decisa con bastevole precisione. Io reputo necessario di risolverla brevemente anche innanzi di render conto del nuovo lavoro da me intrapreso. Quel medesimo esame che mi trasse da prima a concepire l' idea della presente opera, ne mostrerà più sensibilmente l'importanza, e farà scorgere sempre più chiaramente la meta a cui mi sono proposto di pervenire.

Tutte le parti della teorìa sopra la resistenza de' fluidi sono tuttavìa ingombre da un sì gran numero d' elementi ignoti, che vien meno il soccorso medesimo della sublime analisi a tener conto di tante incognite, non che a determinarne i valori.

Quindi l' oggetto di comporre una formola di tale semplicità, che possa desumersene l' espressione algebraica della resistenza e della posizione del centro della medesima, obbligò i fisico-matematici ad omettere nel calcolo delle formole alcune di quelle quantità ignote, e ad affiggere ad altre valori ipotetici più o meno probabili e sovente fallaci.

Malgrado però queste omissioni e queste ipotesi, le formole potrebbero porgere valori perfettamente o prossimamente veri, tanto per la resistenza quanto pel centro di essa. Si ricordi il principio notissimo, che la resistenza totale consiste propriamente nella somma delle resistenze opposte dal fluido alle porzioni picciolissime della superficie premuta, e che la posizione del centro di resistenza dipende essenzialmente ed immediatamente dalla somma dei momenti delle resistenze picciolissime divisa per la resistenza totale. Ciò posto, risulta eviden-

temente che le formole non potranno esprimere nè la vera resistenza totale, nè la giusta posizione del centro, se non giungano ad esprimere il valor vero ed esatto d' una qualunque porzione picciolissima della resistenza. Ma questi valori, malgrado le quantità trascurate e le assunte ipotesi, potranno esser veri o falsi. Se veri, è manifesto che dovrà pure esser vero il valore della resistenza totale, e giusta la posizione del centro di essa: se falsi, ciò seguirà in due diverse maniere. Il valore delle resistenze sarà maggiore del vero per alcuni differenziali della superficie premuta, e minore per gli altri; o questo valore medesimo sarà maggiore o minore in ciascheduno dei differenziali indistintamente. E' dunque evidente che nel primo caso potrebbe accadere che l'eccesso delle resistenze maggiori compensasse il difetto delle minori, per cui la somma o la resistenza totale eguagliasse precisamente il valor vero: e nel secondo il risultato delle formole sarà certamente maggiore o minore del vero; ma nell' un caso e nell' altro le resistenze espresse dalle formole potrebbero essere ripartite in tal guisa da indicare perfettamente il vero punto in cui tutte le pressioni cospirano, e dove ha luogo realmente il centro di resistenza.

Da quest' accordo fortuito però delle formole col valor vero della resistenza totale e colla vera posizione del centro della resistenza, non ne segue necessariamente che se le formole porgessero un valor vero della resistenza totale, dovessero esprimere del pari la stessa posizione del centro, e vice-versa.

Perciò come non si può contare sopra la giusta

misura della resistenza totale espressa dalle formole, se non è dimostrata dallo sperimento, così è forza ricorrere a questo, per assicurarsi della posizione del centro indicata dalle stesse formole.

Sfortunatamente i fisico-matematici, non avendo posto attenzione a questa verità incontrastabile, si appagarono soltanto della corrispondenza tra le formole e l' esperimento che aveva per oggetto la sola resistenza totale.

Ma ciò che dee riputarsi ancora più strano è che appoggiati a questa sola prova non esitarono a creder vere quelle formole, ed a farne uso tanto per rinvenire la resistenza totale, quanto il centro di essa.

Da ciò si potrà dunque conchiudere che malgrado le prove addotte finora in favore delle formole, esse debbono risguardarsi come incerte e fallaci rapporto alla posizione del centro di resistenza, e che i risultati dell' uso fatto finora della stessa posizione del centro in soggetti rilevantissimi d' arti e di scienze esser debbono incerti, se non anche molto lontani dal vero.

Perciò nell' opera che ho intrapreso mi sono proposto di dimostrare in primo luogo se il centro di resistenza che si ottiene dalle formole corrisponda o nò col vero e real centro di resistenza; e secondariamente di rettificare tutte l' erronee applicazioni dipendenti necessariamente dalla mancanza di questa indispensabile corrispondenza.

Ma non poteva io contare sopra tutta l' utilità che si può ritrarre da questo lavoro senza dare ad esso la più grande estensione possibile.

L' indagini sopra il centro di resistenza de' fluidi, siccome pure l' applicazioni de' loro risultati generalmen-

te considerate, risguardano i fluidi elastici e non elastici, tanto finiti che indefiniti, i solidi di differente figura e grandezza, o totalmente od anche in parte immersi ne' fluidi stessi.

Classificati quindi i differenti casi che possono appartenere alle due diverse specie di fluidi, all' indole diversa de' solidi, ed alle moltiplici maniere della loro immersione e posizione, ho esteso a tutti i casi sopra indicati tanto l'esame delle formole, quanto la rettificazione dei loro usi.

Il metodo da me adottato in quest' esame consiste nel determinare con esatti sperimenti il vero e real centro di resistenza, e nel compararne sempre la posizione indicata dagli esperimenti stessi con quella che si rinviene colle formole.

Nello stesso tempo scorgendo in questo confronto che l' espressione delle formole è d' ordinario discorde da quella del fatto, intraprendo costantemente una doppia operazione, che stimo essenzialissima a confermare e ad estendere la dottrina da me fondata. Instituisco l' analisi più diligente degli effetti che si osservano nello sperimento, mostrando la ragion fisica per cui debbono aver luogo in una maniera affatto conforme a' veri principj della teoria delle resistenze; e rivolgo ogni studio a determinare particolarmente gli elementi trascurati e le ipotesi arbitrarie che contribuirono a render false le formole.

Le formole assoggettate al perpetuo confronto de' miei sperimenti son quelle che si adottarono in tante celebri opere per risolvere le più sublimi importanti questioni d' idraulica, di balistica, di nautica ec. Tra

queste formole tre son quelle che occupano il principal luogo: la più generalmente seguita, quella cioè che porge la resistenza proporzionale al prodotto della superficie premuta nel quadrato della velocità e del seno dell' angolo d' incidenza, e l' altre rinvenute posteriormente dai due illustri geometri Juan, e Romme.

Passando poi a ciò che riguarda l' applicazioni da rettificarsi, io considero principalmente quei casi ne' quali ho trovata falsa la posizione del centro di resistenza determinata dalle formole.

Chiamate quindi a sottil esame le medesime applicazioni, rilevai che appartengono a problemi e questioni, la cui soluzione dipende o dalla cognizione soltanto del centro di resistenza, o da questa congiuntamente a quella della resistenza totale. Egli è perciò manifesto che per rettificare la risoluzione de' problemi di tutte due le specie, io dovea sostituire all' adottata erronea posizione del centro di resistenza che porgono le formole, quella esatta e sicura che si ottiene dai nuovi sperimenti.

In questa parte del mio lavoro non ho certamente dimenticato le principali applicazioni fra quelle che sono inseparabili dai veri progressi dell' arti utili, che comprendono le ricerche sulla stabilità dei bastimenti, la dottrina del sito più vantaggioso per gli alberi, la teoria de' remi e del timone, ed altri oggetti di eguale importanza.

Ma come niuna verità è indifferente alla scienza, così intrapresi ancora a rettificare la teoria dei cervi volanti che Alberto Eulero appoggiò alla formola ordinaria, e Juan alla sua propria.

La teoria dei rimbalzi, che fanno i corpi sull'acqua, chiamati *ricochets* dai Francesi, ed illustrata dall' Alembert acquista un grado maggiore di perfezionamento da' miei sperimenti.

Mi riuscì facile il dimostrare che i detti corpi ponno essere rimbalzati dall'acqua anche nei casi nei quali, secondo tutte le teorie ricevute sulla resistenza de' fluidi, non dovrebbero assumere in niuna maniera tal movimento. Così posso aggiugnere una nuova spiegazione dello strano fenomeno, che presentano i movimenti d' alcuni uccelli, i quali dopo esser discesi dall' alto colla coda spiegata e coll' ali aperte, risalgono nuovamente senza lasciar riconoscere moto alcuno di vibrazione nell' ali e nella coda, checchè ne dica il Borelli.

La nuova luce diffusa da' miei sperimenti sulla teoria del centro di resistenza serve nel modo stesso a rischiarare di più le cagioni di quel movimento maraviglioso, che prendono le palle lanciate nell' aria dai cannoni, mortaj, fucili ec., per cui sovente devíano dal piano verticale di projezione, dilungandosi sempre da esso; o accostandovisi a poco a poco, dopo essersene allontanate, lo attraversano per devíare all' opposta plaga descrivendo una curva serpeggiante.

Non a torto perciò l'Accademia di Berlino palesò quanto questo fatto meritava l'attenzione de' matematici, riproponendone l'indagine delle cause con programma accademico, anche dopo l'ingegnose e profonde spiegazioni di Robins, Eulero, e Lombard.

Finalmente esistono in natura fenomeni sorprendenti, che non hanno finora colpito neppure l'attenzione dei fisici e dei matematici, e che non ponno spie-

garsi con verun principio teoretico o sperimentale fino ad ora conosciuto, benchè appartengano alle leggi della resistenza dei fluidi.

Consistono questi in certi movimenti particolari ed invariabili nelle circostanze medesime, che manifestano piani e sottili corpi rettangolari cadenti dall'alto. Cangiando in mille guise i metodi e le forme della sperienza, io mi lusingo d' essere stato il primo a scoprirgli, a descrivergli, e a renderne pienamente ragione colla teoria del centro di resistenza ch' emana necessariamente da' miei sperimenti.

Ecco i principali argomenti compresi nell' opera di cui ragiono. Essa è divisa in tante memorie, quanti sono i casi riguardanti le varie specie de' fluidi, le principali figure de' solidi, e le moltiplici maniere della loro immersione e posizione.

Queste memorie che sono come altrettante sezioni della mia opera, andrò soggettando al purgato giudizio de' miei illustri Colleghi.

MEMORIA I.

Presentata i due luglio 1804.

In questa prima memoria ci restringeremo al solo caso che il fluido sia indefinito, ed il solido una piana e sottil lamina rettangolare indefinitamente immersa e moventesi uniformemente per linea retta e orizzontale, e che tra il fluido e la lastra non nasca vacuo.

PARTE I.

INVESTIGAZIONE SPERIMENTALE DEL CENTRO DI RESISTENZA DE' FLUIDI.

1. Inmi, (fig. 1, 2, 7, 9. tav. I) rappresenti la lastra che si suppone muoversi pel fluido; ed xy la linea retta orizzontale percorsa dalla lastra. E' facile il rilevare, primo, che l'angolo aoy sotto il quale potrà trovarsi la lastra colla direzione oy del suo movimento, sarà retto come nella fig. 1; acuto come nella fig. 2; secondo, che uno dei due lati qualunque, per esempio nm, potrà essere orizzontale (fig. 1), o verticale (fig. 7), o inclinato all' orizzonte (fig. 9).

Perchè non manchi alla presente ricerca la necessaria generalità, indagheremo il centro di resistenza della lastra per tutte le sopra indicate posizioni tanto della sua superficie che del suo lato.

CAP. I.

APPARECCHJ PER L' ESPERIENZE.

ART. I.

Qualità e dimensioni delle lastre.

2. Per gli esperimenti fatti nell' acqua si adoperarono sei lastre di ferro della grossezza di mezza linea incirca, e della grandezza e del peso indicato dalla seguente tavola

Lastre	*Lunghezza*	*Larghezza*	*Peso*
I	9 pollici	6 pollici	16 once
II	9	4	15
III	9	3	13
IV	6	4	7
V	6	3	6
VI	6	2	4

3. Per gli sperimenti nell'aria si adoperarono cinque lastre della grossezza d' una linea in circa, e della grandezza e peso descritto nella tavola seguente

Lastre	*Lunghezza*	*Larghezza*	*Peso*
I	18 pollici	4 pollici	3 once
II	13 poll. 6 lin.	4	4
III	9	4	2 $\frac{1}{2}$
IV	9	6	4
V	9	8	5

4. Le differenze tra i risultati degli sperimenti sopra le lastre dell' indicate dimensioni, e i risultati delle teorie sono, come si vedrà, talmente grandi che per decidere del vero punto in cui cade il centro della resistenza incontrata da così fatti solidi, ho creduto inutile di rinovare gli sperimenti con lastre di maggiore grandezza.

Art. II.

Macchina per muovere le lastre in linea retta.

5. Questa macchina è rappresentata in prospettiva dalla fig. 1, tav. II

bd, b'd' sono due liste o tavole di legno, ciascuna della lunghezza di 140 piedi, parallele l' una all' altra, ed ambedue giacenti in un piano medesimo orizzontale.

ae, a'e' sono altre due simili liste egualmente lunghe, e connesse colle prime ad angolo retto, e perciò verticali e parallele tra loro.

Queste liste in tal guisa riunite vengon sostenute e solidamente fermate dalle due armature o telaj di legname zZZz, yXXy, e da dodici altri a loro simili posti alla distanza di dieci piedi l' uno dall' altro, i quali non vennero segnati nella tavola per evitare una soverchia complicazione della figura.

L' altezza Zz, Zz; Xy, Xy di queste armature è di piedi quattro in circa.

EE è una specie di carro rappresentato in grande dalla figura 2. E' composto di tre pezzi d' ottone GH, GH, EE. GH, GH son due parallelepipedi lunghi tre piedi e grossi un pollice terminanti in cuneo alle loro estremità. Ciascun parallelepipedo è fornito di quattro rotelle di ottone S, S; s, s mobilissime sopra i loro perni.

Le S, S hanno due pollici e dieci linee di diametro e tre linee di grossezza. Son poste nel mezzo e in direzione della lunghezza dei parallelepipedi, e sporgono un poco in fuori da ambe le facce inferiore e superiore de' parallelepipedi stessi. Le s, s più piccole delle prime son poste trasversalmente, ed hanno undici linee soltanto di diametro, una linea e mezzo di grossezza, e sporgono alcun poco in fuori dalle sole facce laterali ed esterne.

I perni di ciascuna rotella hanno il diametro d' una linea all' incirca.

Il pezzo EE parimente d' ottone, lungo due piedi e mezzo, grosso linee quattro e mezzo, vien rappresentato in grande dalla fig. 3. Termina esso in due lastre rettangolari FF, FF, ciascuna lunga mezzo piede ed alta linee sette. Queste lastre son perpendicolari ad EE e perciò parallele tra loro; e servono a ri-

tener collegati e paralleli i due pezzi GH, GH (fig. 2) mediante quattro o più viti.

TD (fig. 2 e 3) è un tubo, esso pure d'ottone, perpendicolare ad EE, lungo tre pollici e tre linee, avente un pollice incirca di diametro.

Il peso di tutti insieme i pezzi sopra descritti ascende ad once centoquarantaquattro.

CK (fig. 2) è una verga d' acciajo diritta, lunga quattordici pollici, e grossa due linee e mezzo. E' tenuta immobile entro il tubo mediante una vite *v*. La verga indicata termina in due braccia uguali della lunghezza di due pollici K1, K1, alle quali è raccomandata la lastra LM che dee servire allo sperimento. Vedremo poi come sia questa lastra attaccata alle dette braccia.

r, r (fig. 1) son due rotelle d' ottone scannellate, perfettamente uguali, e mobili intorno ai loro perni. Hanno tre pollici di diametro e linee due e mezzo di grossezza. I perni passano per due laminette d'acciajo ben fermate sulle liste bd, b'd' alla distanza di cinque piedi dalle loro estremità d, d', ed hanno una linea e un quinto di diametro.

S, S son due ruote di legno del diametro di dieci pollici in circa, scannellate anch'esse ed uguali, come lo sono le rotelle r, r. Si aggirano intorno a' loro perni i quali son distanti dal piano delle liste orizzontali diciannove piedi in circa, o sia ventitrè dal piano sul quale posa la macchina.

Alle estremità H, H del carro (fig. 2) sono attaccati due cordoni di seta uguali e ciascuno del peso di due once e del diametro di mezza linea. Passano sotto le rotelle r, r (fig. 1) e si uniscono alle rote S, S.

La lunghezza di questi cordoni è tale che il carro può esser tirato fino alle estremità incirca a b, a' b' delle liste, come si scorge dalla figura.

P, P sono due pesi uguali attaccati alle estremità di due cordoni della lunghezza di ventitrè piedi e del peso d'un'oncia e mezzo, avvolti attorno i tamburi delle ruote S, S, com' è manifesto per la figura. Il diametro de' tamburi è d' un pollice e nove linee.

Con facile e breve calcolo potrà rilevarsi che le sopra indicate dimensioni delle ruote S, S e de' loro tamburi son tali che mentre si svolge tutto il cordone avvolto attorno a quelli, giugnendo i pesi P, P fino al suolo X X, deve ravvolgersi intorno alle ruote S, S tutta la porzione dei cordoni intercetta tra le carrucole r, r ed il carro posto alle estremità delle liste.

6. Suppongasi il carro posto come lo rappresenta la figura alle estremità a b, a' b' delle liste, ed i due pesi P, P abbandonati alla loro naturale gravità. Discenderanno questi pesi facendo girare le ruote S, S, le quali ravvolgendo intorno a se stesse i cordoni S r H, S r ec. obbligheranno il carro a muoversi tra le liste f d, f' d' per tutto lo spazio H r di centotrentadue piedi.

7. Ora egli è chiaro che questo spazio dovrà esser percorso dal carro in linea retta ed orizzontale.

In linea retta, poichè qualunque forza potesse farlo da quella deviare, verrebbe impedita e distrutta o dalle due liste verticali a e, a' e', o dal peso stesso del carro, o da tutti due insieme cotesti ostacoli. La linea retta poi dovrà esser orizzontale, essendo (§ 5) orizzontale il piano formato dalle liste b d, b' d' sulle quali posa e scorre il carro.

8. Ed affinchè il carro dopo aver percorso i cento trentadue piedi non avesse, per cagione della velocità concepita, ad urtare colle estremità H, ec. nelle carrucole r, r, si son poste a proporzional distanza dalle r, r due corde uguali pQ, pQ attaccate ad una traversa sostenuta da due travicelli fitti, come si vede, nelle liste verticali. Q, Q son due pesi uguali che rasentano il pavimento sul quale posa la macchina.

Giunta la traversa EE del carro al contatto delle due corde pQ, pQ, dovranno queste in grazia dei pesi Q, Q scemare a poco a poco l'impeto del carro ed annientarlo.

9. Compiuta dal carro una corsa, vale a dire percorso da esso tutto lo spazio HL, ove si voglia che faccia altra corsa consimile, si spingerà indietro alle estremità ab, a'b' delle liste; pel qual movimento dovendosi i cordoni SrH, Sr ec. svolgere dalle ruote, gli altri che portano i pesi debbono raggirarsi intorno ai tamburi, e quando il carro sia giunto alle estremità ab, a'b', deve tutto riprendere lo stato anteriore alla prima corsa.

Art. III.

Artificj per muovere la lastra tutta immersa in un fluido indefinito.

10. Pel fluido non elastico scelsi un canale ABCD (fig. 15. tav. I) entro a cui scorreva perennemente dell' acqua.

Era questo lungo centocinquanta piedi, largo set-

te, alto cinque. Vi feci aprire le tre cateratte X, Z, y, onde poterlo asciugare alzando le imposte di legno X, y, ed abbassando l' imposta Z, e riempierlo abbassando reciprocamente le suddette X, y, ed alzando la Z.

Votato con questo mezzo il canale, vi feci collocare sul fondo, e solidamente fissare la macchina (fig. 1. tav. II), riducendo ad uno stesso piano orizzontale le due liste sostenitrici del carro. Indi col metodo già descritto dischiusi il varco all' acqua onde il canale ne fosse ricolmo.

Dalla nota altezza di quattro piedi (§ 5) dei sostegni delle liste, e dall'altezza di cinque piedi del canale si può rilevare che tutte le sei lastre descritte al § 2 dovevano essere totalmente immerse nell' acqua e per tutto il tratto dei centoquaranta piedi della loro corsa.

11. Rimane ora a vedere se possa supporsi la lastra indefinitamente sommersa nell' acqua, e il volume di questo fluido d' indefinita grandezza.

E' indubitato 1°. che la lastra non potrebbe muoversi per l' acqua o per l' aria senza scacciar l' una o l' altra dallo spazio che la superficie anteriore della lastra medesima andrà successivamente occupando; 2°. che a motivo dell' uguale spazio vacuo che rimarrebbe dietro alla lastra, il fluido scacciato dovrà o tutto o una porzione di esso passare dalla parte anteriore alla posteriore della lastra medesima a traverso di tutti e quattro i suoi lati, o sia di tutti i punti del suo perimetro lmni (fig. 1. 2. 7. 9. tav. I); 3°. che questo movimento si dovrà propagare fino ad una certa distanza dal perimetro suddetto. Suppongasi intanto, che la lastra sia immersa tutta nel fluido, e talmente distante da qual-

sivoglia punto della superficie conterminante il volume del fluido medesimo, che il movimento in esso eccitato dalla lastra non pervenga fino a quella superficie; egli è manifesto che sebbene il volume del fluido non fosse assolutamente d' una grandezza infinita riguardo a quella del corpo, potrà tuttavia considerarsi come tale; imperciocchè non giugnendo per ipotesi il movimento destato nel fluido fino alla sua superficie, è evidente che le leggi della resistenza debbono rimaner le medesime, tanto se sia finita, come infinita la distanza d'ogni punto della superficie del corpo da quella del fluido.

Quindi ne viene manifestamente che ad assicurarci come il volume dell'acqua contenuto nel canale possa supporsi di grandezza indefinita relativamente a quello della lastra, e come la lastra possa supporsi indefinitamente immersa nell'acqua, basterà dimostrare, che in tutto lo spazio dei centoquaranta piedi, che si fanno percorrere alla lastra suddetta (§ 5), il movimento da essa eccitato nell' acqua non giugne nè alla superficie superiore di questa, nè al fondo o ai lati del canale.

12. A tal fine col mezzo di cordoncini lunghi tre pollici all' incirca si attaccarono al fondo del canale sulla linea II (fig. 1. tav. II) alquante palle del diametro di sei linee, distanti l' una dall' altra quasi un piede. Erano esse di sughero, onde riempiuto d' acqua il canale, dovessero per la loro minor gravità specifica, staccarsi dal fondo per tutta la distanza di tre pollici corrispondente alla lunghezza dei cordoni cui sono unite. Altrettante d' uguale grossezza e similmente disposte se ne appesero a ciascuno de' lati anteriori delle liste bd, b'd', come altresì alla traversa KK. Quest' ul-

time palle erano d'una specifica gravità alquanto maggiore dell'acqua, affinchè vi potessero rimaner pendule ed obbedienti a qualunque più piccolo suo movimento. Riempiuto poscia il canale, sulla superficie dell' acqua si collocarono in linea corrispondente alla II altre palle di sughero, sicchè formassero una serie di galleggianti.

Per rilevare se il movimento eccitato dalla lastra nel fluido giugnesse alle palle, si faceva fare una corsa alla lastra allorquando per l' immobilità delle palle non mi restava alcun dubbio sulla quiete dell'acqua.

In niuno degli sperimenti intrapresi con tali avvertenze ho potuto accorgermi che si propagasse fino alle palle il più picciolo movimento. Così senza esitare si potrà conchiudere che in ciascuno di questi sperimenti la lastra si moveva come se fosse stata indefinitamente immersa in un volume d' acqua d' indefinita grandezza.

13. Quanto al fluido elastico, fu scelta l' aria dell' atmosfera, e s' istituirono gli sperimenti in luogo ragionevolmente grande per contener la macchina, ed abbastanza difeso da qualunque accidental movimento dell' aria.

Alle palle di sughero si sostituirono delle piume, le quali rimanendo immobili ad ogni corsa della lastra, mi assicurarono che il movimento da essa indotto nell' aria non giugneva nè al pavimento su cui possava la macchina, nè alle liste direttrici, nè al soffitto della stanza; e perciò è forza inferire che la lastra medesima si movesse per tutto lo spazio dei centotrentadue piedi come se si fosse trovata in un volume indefinito d'aria.

Art. IV.

Artificj per muovere la lastra uniformemente.

14. Nella sponda superiore (fig. 1. tav. II) della lista verticale f a' d' e' si piantarono sette traguardi o, 10, 20, 30, ec. distanti dieci piedi l' uno dall' altro; ed altrettanti sulla sponda inferiore dell' altra lista orizzontale f a d e; i primi in situazion tale riguardo ai secondi, che i piani che s' immaginassero passare verticalmente per ciascuna delle visuali O—o—o; O—10—10; O—20—20; ec. si trovassero tutti normali al movimento della lastra. I primi traguardi o, o eran distanti dalle estremità a b, a' b' delle liste, piedi venticinque, e gli ultimi 70, 70, trentasette piedi in circa dalle carrucole r, r.

In ogni sperimento lasciavasi partire il carro dalle estremità a b, a' b' delle liste.

Otto osservatori O, O, O ec. applicati ai traguardi o—o; 10—10; ec. ascoltando la voce di chi contava le vibrazioni d' un buon pendolo a mezzi secondi, notavano gl' istanti ne' quali la lastra passava per ciascuna delle visuali O—o—o; O—10—10; ec.

Con questo mezzo si pervenne a misurare il tempo impiegato dalla lastra nel percorrere ciascuna delle sette diecine di piedi o—10; 10—20; ec. e per conseguenza l' intero spazio o—70 di settanta piedi.

15. Da numero ben grande di sì fatte misure rilevai che quando la lastra si muovea per l' aria, percorreva essa uniformemente i soli venticinque ultimi dei piedi settanta indicati di sopra; laddove quando muo-

veasi per l'acqua, venivano da essa percorsi uniformemente tutti insieme i piedi settanta.

Per rinvenir la cagione di tal differenza convien riflettere; 1°. che quando la lastra muoveasi per l'aria, nell'istante che passava per la prima visuale o — o, una porzione dei due cordoni SrH, Sr ec. eguale all'incirca a quarantacinque piedi, giaceva strisciando sopra le liste orizzontali, e che questa porzione andava diminuendosi a misura che la lastra andava innanzi, fino a tanto che, percorsi da essa i quarantacinque primi piedi, i cordoni più non toccavano in punto alcuno le liste; 2°. che quando la lastra muoveasi per l'acqua, dal momento in cui passava per la visuale o — o, la lunghezza dei cordoni trovavasi tutta intera staccata dalle liste.

E' quindi manifesto che l'accelerazione della lastra per tutti i primi quarantacinque piedi deve nascer da questo che si diminuisce l' attrito al diminuirsi della porzione strisciante dei cordoni.

16. Per togliere quest' accelerazione e procurare alla lastra un moto fisicamente equabile, immaginai che ai due uguali pesi motori P, P fossero attaccati altri due pesi parimente uguali ed equivalenti al massimo attrito dei cordoni, e che l'azione di questi due pesi si andasse diminuendo fino all' annientarsi, a misura che si scemava ed annientava l' attrito suddetto.

Per rinvenire il peso equivalente al massimo attrito si condusse il carro alle estremità dei quarantacinque piedi, cioè tra le due visuali O—40—40; O—50—50 ove termina (§ 15) l'attrito. S' attaccarono indi due pesi capaci di muovere leggermente il carro, per poco che venissero aumentati. Tirato poscia il carro alle estre-

mità ab, a'b' delle liste, vale a dire, ov' è massima la quantità dell' attrito; ai pesi suddetti s' aggiunsero alri due pesi uguali valevoli anch' essi a muoverlo appena appena, qualora s' aumentassero d'altro menomo peso. Egli è manifesto che ciascuno di questi due ultimi pesi deve prossimamente equivalere alla resistenza del massimo sfregamento di ciascuno dei due cordoni corrispondenti.

Scelti per pesi motori due pesi P, P capaci di muovere il carro con quella velocità qualunque con la quale si volea far correre la lastra, si appesero ad essi due cordoni co, co, (fig. 12. tav. II.) ciascuno de' quali portava due catene di ottone oa, oa della lunghezza e del peso equivalente alla metà del massimo attrito.

Tutta la lunghezza ca era tale che trovandosi il carro alle estremità ab, a'b' (fig. 1) delle liste, l'estremità inferiori a, a delle catene (fig. 12) toccavano il piano XXZZ (fig. 1) sul quale posava la macchina.

Da tutto ciò facilmente si comprende che a misura che il carro progredirà nella sua corsa, le catene oa, oa andranno a poco a poco a posarsi sul pavimento suddetto; e ciò è quanto dire che a misura che si diminuirà l' attrito dei cordoni, si diminuirà nella stessa proporzione anche il peso motore.

Ad ottener poi che giunto il carro a quel sito della sua corsa in cui finisce l'attrito, anche le catene avessero terminato di agire col loro peso, si ebbe l' accorgimento di dare a queste una lunghezza tale, che percorsi dal carro i quarantacinque primi piedi di tutto lo spazio 0—70, si trovassero sul piano.

Con tali artificj si giunse a procurare eziandio al-

le lastre moventisi per l' aria un moto sensibilmente uniforme per tutto lo spazio dei settanta piedi 0 — 70.

ART. V.

Artificj per muovere la lastra col lato minore normale al proprio movimento e parallelo o inclinato all' orizzonte.

17. Le due braccia uguali K i, K i (fig. 2. tav. II.) che portano (§ 5) la lastra, son rotonde, ambedue alcun poco similmente ed egualmente ritorte all' ingiù.

Terminano codeste braccia in due corti cilindri OO, II (fig. 4) posti in guisa l' uno rispetto all' altro, che i loro assi formano una sola linea retta perpendicolare all' asse prolungato di CK. Ciascuno di questi cilindri ha un foro a madrevite di tal capacità e figura da poter ricevere la vite W i e la sua testa W, ed è in tal situazione l' uno riguardo all' altro, che i due assi delle viti diventano asse comune dei cilindri.

Le viti W, W terminano, come può rilevarsi dalla fig. 4, in due perni i, i, i quali debbono totalmente uscir fuori dai cilindri, come le viti devono sporger in fuori con una o due spire; il che scorgesi nella fig. 5 rappresentante lo spaccato dei cilindri con entro le viti.

In (fig. 2) è una lastra di ottone rappresentata in prospettiva dalla fig. 6; in profilo pel lungo dalla fig. 7; ed in profilo pel largo dalla fig. 8.

Ha essa due orecchie o, o (fig. 6, 7, 8) normali alla propria superficie inferiore, per le quali passano due perni c i, c i (fig. 5) che la tengono unita alle braccia

Ko, Ko, all' intorno de' quali perni può muoversi liberamente per un arco, come vedremo, maggiore di 90°.

Questa lastra così unita alle braccia Ko, Ko si vede nella fig. 9.

La lastra sperimentale ML (fig. 2) è rappresentata in grande dalla fig. 10. Ha due fori rettangolari nei quali s'incassano i due cilindri OO, II (fig. 4) mediante quattro o più viti. E' talmente unita alla lastra nl (fig. 2), che forma con essa insieme un corpo solo, trovandosi il suo lato trasversale MN parallelo ad EE in ogni punto dell' arco maggiore di 90° pel quale può aggirarsi, come si è detto di sopra.

La fig. 11. mostra il profilo delle lastre ML, nl (fig. 2); e d' un braccio Ko (fig. 4).

18. Collocato orizzontalmente il manico CK (fig. 2, 4) della lastra ML, come lo è appunto nella fig. 11; e supposta orizzontale parimente la lastra NL, potrà essa salire colla estremità anteriore N descrivendo un arco NN″ maggiore di 90°, e collocato medesimamente orizzontale il manico, e verticale la lastra NL come N′L′ potrà questa lastra N′L′ discendere colla estremità N′ descrivendo l' arco NN‴ maggiore parimente di 90°. Il che agevolmente si comprenderà dove si ponga mente che la curvatura Ko (§ 17) delle braccia del manico deve permettere che la lastra, allorquando si trova verticale come N′L′, si possa muovere colla estremità N′ verso il manico medesimo descrivendo l'arco N′N″, e quando si trova orizzontale, come NL, possa muoversi colla estremità L verso il manico d' un arco LL‴; quali due archi N′N″, LL‴ saranno grandi o piccoli a misura che sarà grande o piccola la curvatura Ko.

19. Questa lastra oltre al moto che può acquistare per un arco maggiore di 90° ha parimente la proprietà di rimanere in equilibrio a qualunque grado si collochi di quest'arco, o sia sotto qualunque angolo; quando il di lei asse di rotazione, o sia la linea i i (fig. 5) de' perni sia orizzontale.

Egli è chiaro che a conseguire quest' equilibrio è necessario, che la suddetta linea passi pel centro comune di gravità della lastra sperimentale. E' d' altronde molto difficile che questo centro di gravità vada a cadere nel sito della lastra per cui si vuole che passi il di lei asse di rotazione.

Per ottenere che le lastre anche in questo caso rimangano in equilibrio a qualunque grado dell' arco N'N''' (fig. 11), si sono incassati in siti opportuni alcuni corpicciuoli di maggiore specifica gravità nelle lastre di legno, e di minore specifica gravità in quelle di ferro.

20. Ciò premesso, suppongasi che si voglia muovere la lastra LM (fig. 2) col lato minore orizzontale e normale insieme al suo movimento. E' manifesto che basterà, mediante una squadra, fissare nella posizione orizzontale il lato MN della lastra (fig. 2), ed in tal posizione, mediante la vite *v* fermare entro il tubo TD il manico CK della lastra medesima. Essendo la linea i i (fig. 5) normale a CK (§. 17), e CK parallelo al moto della lastra, di ragione ancora il lato MN sarà normale al detto movimento.

21. Immaginiamo ora che si voglia muovere la lastra col lato MN verticale e normale parimente al suo movimento. E', per le cose anzi dette, evidente, come

allentando alquanto la vite, basterà far girare entro il tubo il manico CK (fig. 2) fino a tanto che il lato MN si trovi nella posizione verticale; indi fermarlo in tal posizione serrando la vite medesima. E' manifesto in oltre che il lato MN si troverà normale altresì a CK e perciò alla linea del suo movimento.

Art. VI.

Artificj per muovere la lastra normale o inclinata alla direzione del suo movimento.

22. A rilevare con qual artificio si possa in ambedue queste posizioni del lato minore della lastra farla correre normalmente, ovvero inclinata d'un angolo dato alla direzione del suo movimento, conviene attentamente riflettere, come da esatti e ripetuti sperimenti costantemente risulta,

1°. che lasciandola partire normale o inclinata alla direzione del suo movimento onde possa incontrar resistenza, incomincia essa ad oscillare intorno all'asse del suo equilibrio, finchè percorsi i quindici o venti primi piedi al più, si rinviene accomodata e ferma sotto un' angolo che conserva, senza la più piccola oscillazione, sino al termine della sua corsa, vale a dire per tutto lo spazio rimanente di settanta o più piedi, cioè fino alle corde pQ, pQ (fig. 1).

2°. che quest'angolo è retto, qualora l'asse d'equilibrio passi pel centro di grandezza; acuto poi, se lo stesso asse d'equilibrio si trovi fra il medesimo centro di grandezza ed il lato superiore MN (fig. 2), e tanto

più acuto, quanto più l'asse d'equilibrio si trova vicino al suddetto lato MN.

Vedremo ai §§. 25, 44 la ragione di questo fenomeno, ed al §. 32 e seguenti l'artificio col quale siamo pervenuti ad esattamente misurare ciascuno degli angoli suddetti.

23. Conchiuderemo intanto, 1°. che per muovere la lastra normale alla direzione del suo movimento, bisognerà che l'asse de' perni o del proprio equilibrio passi pel centro di grandezza; 2°. che per muoverla sotto un dato angolo colla direzione stessa del suo movimento, converrà che l'anzidetto asse d'equilibrio si trovi tra il lato anterior della lastra ed il centro di sua grandezza, e a maggiore o minore distanza da questo centro secondo la maggiore o minore inclinazione che si vorrà dare alla lastra.

Art. VII.

Artificj per impedire che nel fluido non nasca vacuo.

24. Per impedire che non succeda vacuo nell'acqua, basterà che la lastra sia indefinitamente immersa. In tal caso si potrà supporre che la lastra si muova per l'acqua, la quale sia contenuta in un vaso chiuso tutt' all' intorno, e che ne riempia esattamente la capacità. E' indubitato che in questa ipotesi non potrebbe succedere vacuo alcuno tra l'acqua e la superficie della lastra, poichè l'acqua non si può nè comprimere nè dilatare. Quanto poi all'aria, conviene osservare, che es-

sendo compressibile ed elastica, essa dovrà condensarsi dinanzi alla lastra, e rarefarsi dietro di essa; e perciò se la velocità della lastra fosse maggiore di quella con cui l'aria dilatandosi le corre dietro, dovrebbe necessariamente generarsi un vacuo tra l'aria e la superficie posteriore della lastra. Ora è facile a dimostrare che questo vacuo non potrà succedere qualora la velocità della lastra sia minore di 1240 piedi al secondo.

L'aria nel suo stato naturale è compressa da una forza eguale a quella d'una colonna d'acqua di 32 piedi incirca, o sia al peso d'una colonna d'aria di circa 32×800 piedi. Laonde se l'aria compressa da questo peso si lanciasse in uno spazio vacuo, la sua velocità sarebbe quella, che un corpo pesante acquisterebbe cadendo da un' altezza di 32×800 piedi, la quale appunto è uguale a 1240 piedi al secondo. Dunque perchè non si generi vacuo dietro della lastra, bisognerà che la sua velocità sia minore di 1240 piedi al secondo.

Art. VIII.

Artificj per rinvenire il centro di resistenza incontrata dalla lastra moventesi per l' acqua o per l' aria nelle due predette posizioni.

25. Per tutto il tratto dello spazio che la lastra percorre accomodata immobilmente sotto un angolo (§ 22) retto od acuto qualunque, il centro di resistenza da quella incontrata dee trovarsi continuamente in un punto della superficie della lastra, dal quale inalzata e pro-

lungata verso l'asse d'equilibrio una normale alla superficie medesima, passi per lo stesso asse.

Di fatti trovandosi la lastra equilibrata (§ 18) intorno a quest'asse se il centro di resistenza cadesse fuori del punto di sopra indicato, cadrebbe pure fuori dell' asse d' equilibrio, e allora la lastra dovrebbe o accostarsi alla linea orizzontale NL (fig. 11. tav. II) o alla verticale N'L', secondo che il centro suddetto si accostasse al lato superiore *n* della lastra o all' inferiore *l*.

26. E' nulladimeno manifesto che il centro di resistenza incontrata dalla lastra potrebbe non cadere, e non rimaner sull' asse d' equilibrio per tutto il tratto dello spazio percorso dalla lastra ferma sotto un angolo qualunque, qualora soltanto esistesse qualch' altra forza estranea alla resistenza capace di ritenere la lastra medesima nell' indicata posizione.

Affinchè dunque fuori d' ogni dubbio il centro di resistenza cada precisamente sull' asse de' perni, convien dimostrare non esserci forza veruna che possa portarlo o mantenerlo fuori di quella linea.

Oltre la resistenza opposta dal fludio alla lastra, non si posson trovare altre forze agenti su di essa, tranne 1°. la resistenza che dee incontrare il lato superiore della lastra quando questa si muove inclinata; 2°. l'attrito de' perni; 3°. il peso della lastra; 4°. la sua forza motrice. Vedremo ora come nessuna di queste forze vale a spignere il centro di resistenza fuori dell' asse d' equilibrio.

27. Quando la lastra si muove sotto l'angolo N*e*X (fig. 13) la superficie *n n'* della sua grossezza dovrà parimente incontrare una resistenza che potremo suppor-

re raccolta tutta in qualche punto i agente nella direzione ki normale ad nn', e distante ni dall' uno de' lati minori della superficie anteriore della lastra.

Questo punto i si riferisca all' asse e de' perni mediante le due ortogonali eI, Ii. E' chiaro che l' azione delle resistenze va, ki si potrà riferire ai due punti d, I delle linee eN, eI che passano ad angolo retto per e.

Premesso ciò, perchè la lastra $l'n$ percorra lo spazio ZX sotto lo stesso angolo NeX senza punto oscillare intorno ad e, converrà necessariamente che i momenti delle resistenze va, ki siano uguali, vale a dire, che $va \cdot de = ki \cdot \mathrm{I}e$; senza di che la lastra verrebbe costretta a prendere o la posizione N′L′ rovesciandosi addosso alle braccia OK, o la posizione orizzontale ZX, secondo che il momento $va \cdot de$ fosse maggiore o minore del momento $ki \cdot \mathrm{I}e$.

Riflettiamo ora, che essendo d' una mezza o d' una sola linea incirca (§ 2, 3) l' altezza nn', molto picciola ancora sarà la resistenza ki, e che il centro i di essa se non cade nel mezzo di nn', dev' esserne pochissimo discosto, di modo che la sua distanza Ni non potrà essere che di qualche decimale di linea, e per legittima conseguenza picciolissimo il momento $ki \cdot \mathrm{I}e$.

Dovendo per lo contrario la resistenza della superficie nl essere sommamente maggiore della resistenza di nn', e dovendo per l' esistente equilibrio della lastra produrre insieme un momento uguale a quello della resistenza ki, sarà assolutamente necessario che la distanza de sia tanto più piccola della Ie, quanto maggiore è la resistenza di nl sopra quella di nn'. Si ri-

leverà quindi che se, per esempio, la distanza eI fosse di $\frac{1}{4}$ di linea, e la resistenza di nl fosse quaranta volte maggiore della resistenza di nn' la distanza de dovrebbe essere di $\frac{1}{160}$ di linea, cioè a dire, che il centro di resistenza della superficie nl dovrebbe cadere ad una distanza estremamente piccola da e.

28. Quanto all'attrito de' perni, è da riflettere primieramente che la lastra NL (fig. 11) si muove quando essa si collochi orizzontalmente, e vi si ponga sopra una palla rotonda di piombo a considerevole distanza dall'asse e de' perni, e che quando si ponga a piccola distanza dall'asse medesimo, essa conserva l'equilibrio nella sua prima posizione orizzontale. Ognuno agevolmente s'accorgerà che sì fatto equilibrio verrebbe tolto, malgrado la soprapposizione della palla a piccola distanza, se non vi avesse una forza il cui momento tenesse equilibrato quello della palla, e che questa forza altro senza fallo non può essere se non se la resistenza indispensabilmente prodotta dall'attrito de' perni.

Ciò posto, non è egli evidente che il centro a (fig. 13) della resistenza potrebbe, senza movimento alcuno della lastra, trovarsi a quella distanza da O', a cui collocata la palla, questa non vale a disequilibrarla?

A scemare pertanto questa distanza il più che si può, e ad accertarsi in tal modo, che per cagione altresì dell'attrito de' perni il centro a cader dovesse in O', o pochissimo indi lontano, si fabbricarono i perni più sottili e le lastre leggiere quanto più si potè, essendo dimostrato tanto minore essere l'attrito quanto minore è il numero e la pressione dei punti che pro-

ducono l' attrito medesimo. Mediante in fatti queste industrie e l'ungimento de' perni si giunse a diminuirne l' attrito in modo, che la massima distanza da O', alla quale può fermarsi il centro di resistenza, potesse esser maggiore d' una decima di linea incirca. Calcolata in fatti la resistenza assoluta incontrata dalle lastre in ciascuna delle nostre sperienze, e fatte tante palle rotonde di piombo del peso equivalente a ciascuna di quelle resistenze, si rilevò che per contrabbilanciare l' attrito conveniva collocarle a così picciola distanza dall' asse de' perni, che la massima di tali distanze non sorpassasse una decima di linea.

Per tutto ciò si fa evidente, che siccome la resistenza incontrata dalla grossezza del piano, così l'attrito de' perni non varrà certo a discostare sensibilmente da O' il centro della resistenza di *nl*.

29. Quanto al peso della lastra, è cosa evidente poter esso avere una sensibile influenza qualora il centro di gravità della lastra medesima si trovasse notabilmente distante da *e* (fig. 13) come per cagion d'esempio, in *m*; perocchè dovendosi allora supporre il peso tutto raccolto in *m*, una porzione di esso agirebbe per *me*, e verrebbe sostenuta, senza produrre moto alcuno, dai perni; l'altra porzione agirebbe in *m* normalmente ad *ed*, e tenderebbe per conseguenza a tirare in basso la porzione *e*N della lastra; d' onde si vede, che per sostenerla nella posizione *e*N, il centro di resistenza *a* cader dovrebbe a quella distanza da O' capace di produrre un momento uguale a quello della porzione del peso agente in *m*. Ma siccome (§ 19) l'asse de' perni passa pel centro di gravità della lastra, di

modo che rimane essa in equilibrio sotto qualunque angolo, quindi verrà tolto ogni timore che il peso della lastra possa tener lontano da O′ il centro della sua resistenza.

30. Per quello poi che spetta alla forza motrice, gli artificj ond' è mossa la lastra per la linea ZX daranno a conoscere agevolmente che la forza motrice consiste in una continua presione de' perni *e* contro la lastra; e poichè questi passano pel centro di gravità, come si è detto più sopra, di ragione la forza motrice deve passare anch' essa per lo stesso centro; e quindi la lastra *ln* deve muoversi progressivamente per la retta *c*X senza concepire il menomo moto di oscillazione d' intorno ad *e* secondo che nella meccanica è dimostrato. Se dunque la forza motrice non può eccitare nella lastra verun moto d' oscillazione, nemmeno potrà produrre un momento a contrabbilanciare il quale ne fosse necessario un altro.

Avrà dunque a tenersi come evidentemente dimostrato, che per tutto il tratto dello spazio percorso dalla lastra immobilmente accomodata sotto un angolo qualunque (§ 22) il centro di resistenza da essa incontrata si deve trovare sulla linea de' perni, o sommamente ad essa vicino.

31. Premesso ciò, suppongasi per un momento, che quando l' asse d' equilibrio si trovasse alla distanza dal centro di grandezza, per esempio di $\frac{4}{12}$ della metà del lato maggiore della lastra, l' angolo sotto il quale essa s' accomoda percorrendo gli ultimi settanta piedi si ritrovasse di quattordici gradi, egli è manifesto dal fin qui detto, che per la lastra indicata o per altra

simile ed uguale moventesi per lo stesso fluido e colla medesima velocità sotto un angolo di $14°$, il suo centro di resistenza cadrebbe nella linea distante dal centro di grandezza $\frac{4}{12}$ della metà del lato maggiore della lastra.

Potrassi da ciò ad evidenza comprendere, che a rinvenire la linea sulla superficie della lastra nella quale cade il centro di resistenza allor quando si muove pel fluido sotto un dato angolo, basterà far muovere la lastra col suo asse d'equilibrio collocato a varie distanze dal centro di grandezza, e misurare esattamente gli angoli sotto de' quali si accomoda relativamente a ciascuna di queste distanze.

Tali sono gli artificj da noi adoperati per l'esperienze che verremo esponendo nel seguente capitolo.

Le distanze ivi notate dell'asse d'equilibrio sono espresse in ventiquattresime della lunghezza o sia del lato maggiore della lastra.

Per soddisfare pienamente agli oggetti dell'articolo presente null'altro rimane che descrivere gli artificj usati per misurare con precisione gli angoli sotto dei quali s'accomodavano le lastre che si fecero muovere a varie distanze del loro asse d'equilibrio dal centro di loro grandezza.

ART. IX.

Artificio per misurare l' angolo sotto del quale rimane la lastra mentre percorre i 70 piedi.

32. Si fece fermare ad una traversa KK (fig. 1. tav. II) uno stilo *o*.

Era la traversa a distanza tale dalla visuale O—70—70, e dalla superficie inferiore delle liste orizzontali b d, b' d'; e lo stilo *o* in tal sito della traversa medesima, e così inclinato, che nell'atto in cui avesse la lastra terminato di percorrere equabilmente i settanta piedi, dovesse in qualche punto della porzione della sua superficie inferiore al suo asse d' equilibrio urtare nella punta *o* dello stilo, ed urtando, lasciare nella superficie un segno della sua impressione, e continuare dopo quest' urto la sua corsa passando liberamente sopra la traversa KK, e progredire ancora fino a tanto che la traversa EE del carro urtando nei pendoli pQ, pQ si estinguesse a poco a poco il movimento di essa.

Dopo ciò si tirò addietro la lastra, e fermata con acconcj artificj in tal sito e sotto un tal angolo che l' estremità dello stilo combaciasse colla lastra nel punto, o traccia in essa lasciata dall' estremità suddetta, si misurò l' angolo che la lastra in tal posizione formava coll' orizzonte.

La figura 3. della tav. I rappresenti in profilo la suddetta posizione della lastra quando si mnove co' lati minori orizzontali; e la figura 11. rappresenti in pianta quella medesima posizion della lastra quando si muove co' lati minori verticali. Ognun vede che condotta

un' orizzontale $'yy$, l'angolo NHy sarà quello sotto di cui la lastra avrà urtato lo stilo e perciò quello stesso, sotto del quale si troverà accomodata nel percorrere i settanta piedi.

33. Per misurar l'angolo NHy (fig. 3) fu accostato alla superficie anterior della lastra un quarto di cerchio Hrq armato di filo a piombo e graduato con precisione: poi si notarono i gradi dell'arco Pq. Poichè l'angolo qHP è uguale all'angolo NHy, è manifesto che il suddetto arco Pq misurerà l'angolo NHy.

Per misurar l'angolo NHy (fig. 11) fu posta una squadra d'ottone con uno de' suoi lati al contatto della lista verticale fe, e con l'altro al contatto della lastra. Alla squadra fu sottoposto orizzontalmente il quarto di cerchio in tal modo che col centro c toccasse il lato esteriore della squadra, e col proprio lato la lastra: poi si numerarono i gradi dell' arco pq. Essendo l' angolo qcp uguale all'angolo NHy, l'arco qp sarà la misura dell' angolo NHy.

34. Per vie meglio assicurarci della precisione nella misura di questi angoli si fecero fare alla lastra più corse, misurando dopo ciascuna di queste l'angolo corrispondente a NHy.

35. Ad ottener poi che in ognuna di queste sperienze urtasse lo stilo in punti l'uno dall'altro distanti ed alquanto lontani, onde non derivassero confusioni ed equivoci nelle tracce, dopo d' avere ad ogni corsa misurato l' angolo, si dava allo stilo medesimo più o meno d' inclinazione verso l' orizzonte, e si faceva accostare più o meno ad una delle due liste verticali afed (fig. 1. tav. II).

36. Veggiam' ora gli artificj ai quali si ricorse per ottenere con precisione e facilità cotesti due movimenti dello stilo.

Venne esso racchiuso tra due lamine o quarti di cerchio *ab*, *ab* (fiig. 14. tav. II) incassati ad una conveniente distanza fra loro in una lastra rettangolare *kk* unita strettamente alla faccia inferiore della traversa KK (fig. 1, e 14) mediante due galletti a madrevite G, G, e mediante due viti V, V che passano per un' apertura *hh* della traversa e per due fori 1, 2 della lastra.

La parte dello stilo entrante fra le due lamine *ab*, *ab* ha un forame. Per questo, e per le due lamine passa un perno *e*, intorno a cui può lo stilo rivolgersi descrivendo colla punta *o* un arco maggiore di 90°.

Si ferma quindi lo stilo a piacimento ad un dato grado di questo grand' arco mediante un galletto ed una vite *e'* che passa per le due lamine e per lo stilo medesimo.

La distanza 1, 2. (fig 14) dei forami della lastra *kk* è più piccola della lunghezza *hh* dell' apertura della traversa KK, onde la lastra *kk* potesse scorrere lungo la linea *hh* accostandola all' una o all' altra lista verticale afed (fig. 1) ed esser fermata col mezzo dei galletti (fiig. 14) G, G ove più convenisse.

CAP. II.

SPERIMENTI E LORO RISULTATI.

37. I risultati che si ottennero muovendo le lastre col lato minore orizzontale, si trovarono precisamente

uguali ai risultati rinvenuti per qualunque altra posizione del lato istesso. Perciò non esporrò che gli sperimenti che riguardano la posizione orizzontale del lato minore. La descrizione di questi si ha nelle seguenti tavole.

38. Credo importante avvertire 1°. che ciascuno di questi sperimenti è il medio risultante da venti e più che se ne fecero. 2°. che la massima differenza tra questi ultimi nella misura degli angoli non fu che di pochi minuti.

39. . . . . *Sperimenti fatti nell' acqua.*

Sperimento I.

Lastra N. 1. Velocità 1. piede in o , 60''					
Distanze dell'asse d' equilibrio.	0	1	2	3	4
Angoli corrispondenti	90°	53°	34°	25°, 40'	21°, 30'

Sperimento II

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in o , 30''			
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	3	4
Angoli corrispondenti	90°	15°, 40'	12°, 25'

SPERIMENTO III.

Lastra N. 2. Velocità 1. piede in 0, 60″			
Distanze dell'asse d' equilibrio	0	3	4
Angoli corrispondenti	90°	25°	21°

SPERIMENTO IV.

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in 0, 47″		
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	4
Angoli corrispondenti	90°	18°, 30′

SPERIMENTO V.

Lastra istessa. Velocità 1. piede in 0, 30″			
Distanze dell'asse d' equilibrio	0	3	4
Angoli corrispondenti	90°	13°, 20′	12°

Sperimento VI.

Lastra istessa. Velocità 1. piede in 23''		
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	4
Angoli corrispondenti	90°	10°, 45'

Sperimento VII.

Lastra N. 3. Velocità 1. piede in 0, 60''			
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	3	4
Angoli corrispondenti	90°	24°, 15'	20°, 25'

Sperimento VIII.

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in 0, 47''		
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	4
Angoli corrispondenti	90°	17°, 35'

SPERIMENTO IX.

Lastra N. 4. Velocità 1. piede io 0, 60''					
Distanze dell' asse d' equilibrio.	0	1	2	3	4
Angoli corrispondenti	90°	54°	34°, 30'	25°, 30'	21°, 30'

SPERIMENTO X.

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in 0, 38''		
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	4
Angoli corrispondenti	90°	15°

SPERIMENTO XI.

Lastra istessa. Velocità 1. piede in 0, 19''		
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	4
Angoli corrispondenti	90°	8°, 44'

Sperimento XII.

Lastra N. 5. Velocità 1. piede in 0 , 60″		
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	2
Angoli corrispondenti	90°	34°

Sperimento XIII.

Lastra N. 6. Velocità 1. piede in 0 , 60″		
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	2
Angoli corrispondenti	90°	33° , 25′

Sperimento XIV.

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in 38″		
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	2
Angoli corrispondenti	90°	27° , 50′

40. . . . . *Sperimenti istituiti nell' aria.*

SPERIMENTO I.

Lastra N. 1. Velocità 1. piede in 0, 15″			
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	4	5
Angoli corrispondenti	90°	13°, 56′	6°, 37′

SPERIMENTO II.

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in 0, 30″			
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	4	5
Angoli corrispondenti	90°	15°, 33′	9°, 25′

SPERIMENTO III.

Lastra N. 2. Velocità 1. piede in 0, 15″				
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	3	4	5
Angoli corrispondenti	90°	37°, 30′	19°, 15′	7°, 46′

Sperimento IV.

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in 0, 30''			
Distanze dell'asse d' equilibrio	0	4	5
Angoli corrispondenti	90°	20°, 38'	9°, 30'

Sperimento V.

Lastra N. 3. Velocità 1. piede in 0, 15''			
Distanze dell'asse d' equilibrio	0	4	5
Angoli corrispondenti	90°	26°, 6'	12°, 26'

Sperimento VI.

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in 0, 30''				
Distanze dell'asse d' equilibrio	0	3	4	5
Angoli corrispondenti	90°	52°, 22'	27°, 41'	15°, 20'

SPERIMENTO VII.

Lastra N. 4. Velocità 1. piede in 0, 15″			
Distanze dell'asse d'equilibrio	0	4	5
Angoli corrispondenti	90°	27°, 39′	15°, 36′

SPERIMENTO VIII.

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in 0, 30″				
Distanze dell'asse d'equilibrio	0	3	4	5
Angoli corrispondenti	90°	49°, 50′	28°, 30′	17°, 50′

SPERIMENTO IX.

Lastra N. 5. Velocità 1. piede in 0, 15″			
Distanze dell'asse d'equilibrio	0	4	5
Angoli corrispondenti	90°	28°, 9′	18°, 40′

SPERIMENTO X.

Lastra come sopra. Velocità 1. piede in 0, 30"			
Distanze dell' asse d' equilibrio	0	4	5
Angoli corrispondenti	90°	29°, 15'	20°, 35'

41. Dalle precedenti tavole apparisce evidentemente, che nei due fluidi, e per qualsivoglia velocità e grandezza delle lastre, l' angolo sotto del quale esse si accomodarono fu sempre retto quando l' asse del loro equilibrio passava pel centro di grandezza, e sempre acuto quando l'asse suddetto passava tra il centro di grandezza ed il lato superiore della lastra; e tanto più acuto, quanto maggiore era la distanza dell' asse dal centro di grandezza.

Ciò posto dal §. 25. dovrà inferirsi. 1°. che il centro di resistenza d' un piano e sottil corpo rettangolare moventesi immerso indefinitamente nell' acqua, o nell' aria tranquilla, cadrà nel centro di grandezza della superficie anteriore del solido stesso, quante volte questo si moverà ad angolo retto colla direzione del suo movimento. 2°. che il centro di resistenza cadrà fuori del centro di grandezza della detta superficie accostandosi al lato anteriore del solido, quando questo si moverà sotto un angolo acuto; e s' accosterà tanto più al lato suddetto, quanto più acuto sarà quest' angolo.

42. Dai suddescritti sperimenti si può rilevare ancora, che rimanendo l'asse d'equilibrio all'istessa distanza dal centro di grandezza, gli angoli sotto i quali si accomodavano le lastre variavano, variando la velocità, la lunghezza, e la larghezza della lastra, e la densità del fluido. Nulladimeno a comodo de' Leggitori non reputo superfluo di rappresentare in tante tavole queste medesime variazioni.

43. . . *Angoli corrispondenti alle varie velocità.*

PER L' ACQUA.

I.

Lastra N. 2. Distanza dell' asse d' equilibrio 4			
Velocità	1. pied. in 0,30″	1. pied. in 0,47″	1. pied. in 0,60″
Angoli	12°	18°, 30′	21°

I I.

Lastra N. 4. Distanze dell' asse d' equilibrio 4		
Velocità	1 pied. in 0, 38″	1 pied. in 0, 60″
Angoli	15°	21°, 30′

III.

Lastra N. 1. Distanza dell' asse d' equilibrio 4		
Velocità	1 pied. in 0, 30″	1 pied. in 0, 60″
Angoli	12°, 25′	21°, 30′

IV.

Lastra N. 2. Distanza dell' asse d' equilibrio 4		
Velocità	1 pied. in 0, 30″	1 pied. in 0, 60″
Angoli	13°, 20′	25°

V.

Lastra N. 3. Distanza dell' asse d' equilibrio 3		
Velocità	1 pied. in 0, 47″	1 pied. in 0, 60″
Angoli	17°, 35′	20°, 25′

PER L' ARIA.

I.

Lastra N. 1. Distanza dell' asse d' equilibrio 4		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	13°, 56′	15°, 33″

II.

Lastra come sopra. Distanza dell' asse d' equilibrio 5		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	6°, 37′	9°, 25′

III.

Lastra N. 2. Distanza dell' asse d' equilibrio 4		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	19°, 15′	20°, 38′

IV.

Lastra come sopra. Distanza dell' asse d' equilibrio 5		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	7°, 46′	9°, 30″

V.

Lastra N. 3. Distanza dell' asse d' equilibrio 4		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	26°, 6′	27°, 41′

VI.

Lastra come sopra. Distanza dell' asse d' equilibrio 5		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	12°, 26′	15°, 20′

VII.

Lastra N. 4. Distanza dell' asse d' equilibrio 4		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	27°, 39′	28°, 30′

VIII.

Lastra come sopra. Distanza dell' asse d' equilibrio 5		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	15°, 36′	17°, 50′

IX.

Lastra N. 5. Distanza dell' asse d' equilibrio 4		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	28°, 9′	29°, 15′

X.

Lastra come sopra. Distanza dell' asse d' equilibrio 5		
Velocità	1 pied. in 0, 15″	1 pied. in 0, 30″
Angoli	18°, 40′	20°, 35′

Dalle tavole precedenti risulta manifestamente che l' angolo acuto, sotto il quale si accomodava una stessa lastra, qualunque fosse la sua grandezza, e distanza dell' asse d'equilibrio, ed il fluido pel quale si moveva, era tanto più picciolo quanto era maggiore la velocità della lastra.

Da ciò segue di necessaria conseguenza che il centro di resistenza incontrata da un piano e sòttil corpo rettangolare moventesi per l' acqua o per l' aria tranquilla sotto un qualunque angolo acuto colla direzione del suo movimento, sarà tanto meno distante dal centro di grandezza della superficie anteriore del solido, quanto più grande sarà la sua velocità.

Per dimostrarlo, suppongasi che N *e* X (fig. 13. tav. II) rappresenti l' angolo sotto il quale si è accomodata la lastra LN movendosi con una data velocità uniforme. Si è veduto 1°. che fino a tanto che la lastra rimanesse sotto quest' angolo il centro della resistenza dovrebbe per tutto lo spazio ch' essa uniformemente percorre trovarsi di necessità in un tal punto O′ della superficie anteriore *nl* della lastra, dal quale calata una

perpendicolare O′*e* questa cadesse sopra l'asse *e* de' perni. 2°. che l' angolo suddetto non potrebbe aumentarsi a meno che il centro di resistenza non uscisse dal punto O′ discostandosi dal centro di grandezza C′, nè per l' opposto impicciolirsi qualora il centro medesimo di resistenza non uscisse da O′ accostandosi al centro di grandezza C′. L' impicciolimento dell' angolo acuto N*e*X prodotto dall' aumento della velocità della lastre è dunque una prova invincibile che aumentando la velocità della lastra il centro di resistenza s' accosta al centro di grandezza.

Si chiederà forse come possa accadere che il centro di resistenza O′ s' accosti a C′, vale a dire ch' esca dall' asse *e* de' perni accostandosi alla inferiore estremità *l* della lastra, senza che la lastra in luogo di fermarsi sotto un' angolo più piccolo di N*e*X, come succede nello sperimento, non continui ad accostarsi colla estremità *n* alla linea orizzontale ZX?

Per soddisfare pienamente a questa ricerca basterà risovvenirsi che il centro di resistenza di una lastra rettangolare si discosta tanto più dal centro di sua grandezza quanto è più piccolo l' angolo formato dalla lastra colla direzione del suo movimento. Per la qual cosa, se per l' aumento della velocità della lastra LN il centro di resistenza O′ si accosta al centro C′ di grandezza, e s' impicciolisce l' angolo N*e*X, per l' impicciolimento di quest' angolo il centro istesso di resistenza dovrà pure discostarsi da C′ ed avvicinarsi di nuovo ad O′. Giunto in O′ l' angolo N*e*X sarà più piccolo, e la lastra ferma sotto quest' angolo dovrà continuare la sua corsa, come accadde nelle sperienze.

44.... *Angoli corrispondenti alle varie lunghezze.*

PER L' ACQUA.

I.

Larghezza della Lastra 4. poll. Veloc. 1. pied. in 0 , 60" Distanza dell' asse d' equilibrio 3.		
Lunghezze	9 poll.	6 poll.
Angoli	25°	25° , 30′

II.

Larghezza della Lastra 4. poll. Veloc. 1. pied. in 0 , 47" Distanza dell' asse d' equilibrio 4.		
Lunghezze	9 poll.	6 poll.
Angoli	18° , 30′	19°

III.

Larghezza della Lastra 4. poll. Veloc. 1. pied. in 0 , 19" Distanza dell' asse d' equilibrio 4.		
Lunghezze	9 poll.	6 poll.
Angoli	8°	8° , 4′

PER L' ARIA.

I.

Larghezza della Lastra. 4. poll. Veloc. 1. pied. in 0, 15″. Distanza dell' asse d' equilibrio 4.			
Lunghezze	18 poll.	13 $\frac{1}{2}$ poll.	9 poll.
Angoli	13°, 56′	19°, 15′	26°, 6′

II.

Larghezza istessa. Veloc. 1. pied in 0, 30″. Distanza dell' asse come sopra.			
Lunghezze	18 poll.	13 $\frac{1}{2}$ poll.	9 poll.
Angoli	15°, 33′	20°, 38′	27°, 4′

III.

Larghezza come sopra. Veloc. 1. pied. in 0, 15″ Distanza dell' asse d' equilibrio 5.			
Lunghezze	18 poll.	13 $\frac{1}{2}$ poll.	9 poll.
Angoli	6°; 37′	7°, 46′	12°, 26′

IV.

Larghezza istessa. Veloc. 1. pied. in 0, 30″ Distanza dell' asse come sopra.			
Lunghezze	18 poll.	13 $\frac{1}{2}$ poll.	9 poll.
Angoli	9°, 25′	9°, 30′	15°, 20′

Queste tavole dimostrano ad evidenza che aumentando la lunghezza delle lastre s'impicciolivano gli angoli sotto i quali rimanevano inclinate percorrendo i settanta piedi. Il che, pei ragionamenti del § precedente ci manifesta che il centro di resistenza incontrata da un piano e sottil corpo rettangolare moventesi per l'acqua, o per l'aria tranquilla sotto un qualunque angolo acuto sarà tanto meno distante dal centro di grandezza della superficie anteriore del solido, quanto più sarà grande il lato longitudinale della superficie medesima.

45.... *Angoli corrispondenti alle varie larghezze.*

Per l' acqua.

I.

Lunghezza della Lastra 9. poll. Veloc. 1. pied. in 0 , 60″ Distanza dell' asse d' equilibrio 3.			
Larghezze	6 poll.	4 poll.	3 poll.
Angoli	25°, 40′	25°	24°, 15′

II.

Lunghezza 9. poll. Veloc. 1. pied in 0 , 60″ Distanza dell' asse d' equilibrio 4.			
Larghezze	6 poll.	4 poll.	3 poll.
Angoli	21°, 30′	21°	20°, 25′

III.

Lunghezza 6. poll. Veloc. 1. pied. in 0 , 60″ Distanza dell' asse d' equilibrio 2.			
Larghezze	4 poll.	3 poll.	2 poll.
Angoli	34°, 30′	34°	33°, 25′

Per l' aria.

I.

Lunghezza della Lastra 9. poll. Veloc. 1. pied. in o , 15'' *Distanza dell' asse d' equilibrio 4.*			
Larghezze	8 poll.	6 poll.	4 poll.
Angoli	28°	27° , 39'	26° , 6'

II.

Lunghezza istessa. Velocità 1- pied. in o , 30'' *Distanza dell' asse d' equilibrio come sopra.*			
Larghezze	8 poll.	6 poll.	4 poll.
Angoli	29° , 15'	28° . 30'	27° , 41'

III.

Lunghezza istessa. Velocità 1. pied. in o , 15'' *Distanza dell' asse d' equilibrio 5.*			
Larghezze	8 poll.	6 poll.	4 poll.
Angoli	18° , 40'	15° , 36'	12° , 26'

IV.

Lunghezza istessa. Velocità 1. pied. in 0, 30″ Distanza dell' asse d' equilibrio come sopra.			
Larghezze	8 poll.	6 poll.	4 poll.
Angoli	20°, 35′	17°, 50′	15°, 20′

Nelle tavole precedenti si scorge che aumentando la larghezza delle lastre s' ingrandivano sensibilmente gli angoli acuti sotto i quali si accomodavano. Il che non potendo (§ 43) accadere a meno che il centro di resistenza non esca dall' asse d' equilibrio accostandosi al lato anteriore delle lastre, dovrassi conchiudere che il centro di resistenza incontrata da un piano e sottil corpo rettangolare moventesi per l' acqua, o per l' aria tranquilla sotto un qualunque angolo acuto si troverà a tanto maggior distanza dal centro di grandezza della superficie anteriore del solido, quanto maggiore sarà la larghezza della superficie medesima.

46... *Angoli corrispondenti alle due specie de' fluidi.*

I.

Lunghez. della Lastra 9. poll. larghez. 4. poll. veloc. 1. pied. o , 30″ Distanza dell' asse d' equilibrio 4.	
Angolo nell' acqua	12°
Angolo nell' aria	27 , 41′

II.

Lunghez. della Lastra 9. poll. larghez. 6. poll. veloc. 1. pied. in o , 30″ Distanza dell' asse d' equilibrio 4.	
Angolo nell' acqua	12° , 25′
Angolo nell' aria	28° , 30′

III.

Lunghez. della Lastra 9. poll. larghez. 6. poll. veloc. 1. pied. in o , 30″ Distanza dell' asse d' equilibrio 3.	
Angolo nell' acqua	25° , 40′
Angolo nell' aria	49° , 50′

IV.

Lunghez. della Lastra 9. poll. larghez. 4. poll. veloc. 1. pied. in 0, 30″ Distanza dell' esse d' equilibrio 3.	
Angolo nell' acqua	13°, 20′
Angolo nell'aria	52°, 22′

Queste tavole manifestano che gli angoli sotto i quali si accomodavano le lastre erano più acuti quando muoveansi per l' acqua di quello fossero quando scorreano per l' aria. Il che pei ragionamenti del § 43 prova evidentemente che il centro della resistenza dell' acqua si scosta meno di quello della resistenza dell' aria dal centro di grandezza della lastra.

Cap. III.

RAGION FISICA DEGLI SPERIMENTI.

47. A rilevar la ragione meccanica per cui il centro di resistenza opposta dall' acqua, e dall' aria alle lastre debba cadere nel sito indicato dagli sperimenti, è necessario permettere alcune osservazioni sul movimento che le lastre eccitano in ciascuno dei due fluidi, sulle specie diverse di resistenza, ed espressioni generali delle loro misure.

Art. I.

Del movimento de' fluidi.

48. Incominceremo dal caso che la lastra si muova direttamente.

Sia lm (fig. 1. tav. I) la lastra che si muova pel fluido tranquillo STT'S' uniformemente e per la linea retta oy e direttamente, cioè sotto l'angolo retto aoy.

La Xy (fig. 1, 2) sia la linea che separa il fluido fuggente verso i punti opposti del perimetro nlmi (§ 11).

Per brevità, e chiarezza questa linea sarà d'ora innanzi chiamata l'*asse del movimento del fluido*.

Supponghasi che per questa linea normalmente alla superficie della lastra passino tanti piani che dividano la lastra ed il fluido.

l'n' (fig. 1) sia la sezione fatta nella superficie della lastra da uno, qualunque siasi, dei suddetti piani, ed STT'S' la sezione fatta nel fluido dal piano istesso.

l'n' (fig. 5) rappresenti in profilo la sezione *l'n* della fig. 1, ed STT'S' rappresenti in prospettiva la sezione STT'S' della fig. medesima.

Ciò posto, passeremo alle osservazioni seguenti.

Osservazione 1ª. Il fluido che si troverà nel piano d'una stessa sezione qualunque STT'S' fuggirà dalla parte anteriore alla posteriore della lastra movendosi sempre pel piano suddetto.

E in vero la lastra nel suo movimento spingerà innanzi e in direzioni normali alla sua superficie anteriore il fluido che è al contatto della superficie medesima. Oltracciò questo fluido sarà respinto dall' anteriore con-

tro la lastra con egual forza e in direzioni diametralmente opposte alle prime. D' onde è manifesto che la forza spingente il fluido (§ 11) dalla parte anteriore alla posteriore della lastra sarà la reazione del fluido medesimo. Ora le direzioni nelle quali la suddetta forza agirà sopra tutte le particelle del fluido fuggente essendo normali alla superficie della lastra, la forza colla quale il fluido che trovasi in un piano qualunque $STT'S'$ (fig. 5) sarà cacciato dietro la lastra, si troverà nel piano medesimo, e perciò il fluido non potrà muoversi se non per questo piano.

Osservazione 2ª. Il fluido che si muoverà pel piano $STT'S'$ (fig. 5) si muoverà per le linee ex. gra. $\gamma\,\alpha\,n'\,\pi\,\upsilon$, $1\,s\,2\,3$, $4\,z\,5\,\gamma'\,6\,n'$; $\gamma\,\alpha'\,l'\,\pi'\,\upsilon'$, $1'\,s'\,2'\,3'$, $4'\,z'\,5'\,\gamma'\,6'\,l'$.

Le molecole del fluido non potendo per cagion del ostacolo della lastra muoversi nelle direzioni in cui agisce la forza motrice, vale a dire (*Osservazione* 1ª) per le rette normali alla superficie anteriore della lastra medesima, dovranno scostarsi dalle suddette direzioni a qualche distanza da essa lastra per esempio in γ, 1, 4; γ, 1', 4', e scostarsi quanto più si avvicineranno all' ostacolo $l'n'$. Da ciò è facile a conoscere 1° che le molecole che si trovano il γ al contatto dell' asse Xy dovranno descrivere le curve per esempio $\gamma\alpha$, $\gamma\alpha'$ che toccheranno l' asse Xy nel punto γ, e la superficie della lastra nei punti α, α', e che in seguito quelle curve coïncideranno e s' applicheranno esattamente pei tratti $\alpha\,n'$, $\alpha'\,l'$ sulla superficie della lastra. 2° che le molecole per esempio 1, 4; 1', 4' distanti dall' asse Xy descriveranno linee tutte curve per esempio $1\,s$, $4\,z$; $1'\,s$, $4'\,z'$. Egli è poi evidente che dai punti n', s, z; l', s', z'

questo fluido dovrà, a motivo della resistenza e reazione del fluido ambiente e del vacuo che rimarrebbe dietro alla lastra, piegare verso la superficie posteriore di essa muovendosi per le curve $n'\pi v$, $s23$, $z5\gamma'6n'$; $l'\pi'v'$, $s'2'3'$, $z'5'\gamma'6'l'$.

Osservazione 3ª. Gli spazj $\alpha\gamma\alpha'$, $6\gamma'6'$ anteriore e posteriore rimarranno pieni di fluido che si muoverà insieme con la lastra, e colla stessa sua velocità. Ciò è una necessaria conseguenza della supposizione che non nasce vacuo.

Quindi la velocità rispettiva del fluido per le linee $\gamma\alpha n'$, $\gamma\alpha' l'$; $\gamma' 6 n'$, $\gamma' 6' l'$ sarà, come fu già dimostrato dal Sig. Alembert *(a)*, infinitamente picciola nelle porzioni $\gamma\alpha$, $\gamma\alpha'$; $\gamma 6$, $\gamma' 6'$ di quelle linee, e anderà crescendo dai punti $\alpha, \alpha', 6, 6'$ progredendo verso l'estremità n', l'.

Osservazione 4ª. L'asse Xy sarà parallelo al moto della lastra e passerà pel centro di grandezza della medesima.

Muovendosi la lastra direttamente, il fluido avrà eguale facilità a muoversi tanto verso il lato nm (fig. 1), quanto verso l' opposto li, d' onde segue che il piano separante i due fluidi dovrà essere normale alla superficie della lastra, e passare per la linea bb' che la dimezza trasversalmente.

Il fluido avrà pure eguale facilità a muoversi verso i due lati longitudinali im, ln, e perciò anche il piano separante questi due fluidi dovrà esser normale alla superficie della lastra, e passare per la linea aa' che

(a) Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides.

la dimezza longitudinalmente; quindi l'asse Xy (fig. 5) dovendo trovarsi in ciascuno di questi piani coinciderà nella linea della loro intersecazione, la quale perciò passerà pel centro di grandezza della lastra, e sarà ad essa normale.

Laonde le curve $\gamma\alpha n'\pi\upsilon$, $1s23$, $4z5\gamma'6$ descritte dalle molecole $\gamma, 1, 4$ saranno uguali e simili alle curve $\gamma\alpha' l'\pi'\upsilon'$, $1's'2'3'$, $4'z'5'\gamma'6'$ descritte dalle molecole γ, $1', 4'$ che si trovano distanti da γ come lo sono le molecole $\gamma, 1, 4$, e perciò anche 1°. $o\alpha = o\alpha'$; ossia $\alpha n' = \alpha' l'$, 2°. $o6 = o6'$, ossia $6n' = 6'l'$, e supposta $\alpha r = \alpha' r'$; v la velocità rispettiva del fluido in r, v' quella del fluido in r', sarà $v = v'$, e similmente supposto $63 = 6'3'$, u la velocità rispettiva del fluido in 3, u' quella del fluido in 3', sarà $u = u'$.

Osservazione 5ª. Il peso del fluido incompressibile non potrà indur cangiamento alcuno nei movimenti de' quali abbiamo fin' ora parlato.

Non producendosi vacuo ogni molecola del fluido continuerà ad essere premuta egualmente in ogni sua parte dal peso del fluido ambiente, e perciò avrà quella facilità a muoversi per ogni verso che avrebbe se il fluido non fosse grave.

Osservazione 6ª. Così fatti movimenti vengono comprovati da facile sperimento.

Cogli artificj dell' art. 1°. si fece muovere lentamente per l'acqua e per l'aria la lastra N. 1. (§ 2, e 3) e per discernere il movimento ch'essa dovea eccitare nei due fluidi si sparsero in essi sottilissimi corpicciuoli poco più pesanti dei fluidi onde vi potessero rimaner sospesi qualche momento e per conseguenza concepire il

solo movimento dei fluidi stessi. Osservando attentamente i detti corpicciuoli si trovò che il loro movimento era quello stesso che nelle precedenti osservazioni dicemmo dovea avvenire nei fluidi.

49. Perciò che spetta al caso in cui la lastra si muove obbliquamente, sia l m (fig. 2. tav. I) la lastra che si muova pel fluido tranquillo STT′S′ uniformemente e per la linea retta o y, sotto l' angolo acuto *a* o y, ed X y la linea che separa il fluido fuggente verso i punti opposti del perimetro n l m i.

Suppongasi come nel §. precedente che per quella linea normalmente alla superficie della lastra passino tanti piani che dividano la lastra ed il fluido. *l′ n′* sia la sezione fatta sulla superficie della lastra da uno qualunque siasi dei suddetti piani, ed STT′S′ la sezione fatta nel fluido dal piano istesso. *l′ n′* (fig. 6) rappresenti in profilo la sezione *l′ n′* della fig. 2., ed STT′S′ rappresenti in prospettiva la sezione STT′S′ della medesima fig. 2. Ciò premesso passeremo alle seguenti osservazioni.

Osservazione 1ª. Anche in questa ipotesi, come in quella del moto diretto della lastra, il fluido che si troverà nel piano d'una stessa sezione qualunque STT′S′ fuggirà dalla parte anteriore alla posteriore della lastra muovendosi sempre pel piano suddetto.

Osservazione 2ª. Il fluido scorrente pel piano STT′S′ si muoverà per le linee ex. graz. $\gamma\, n'\, \pi\, \upsilon$, $1\,2\,\gamma'\,3$; $\gamma\,\alpha'\, l'\, \pi'\, \upsilon'$, $1'2'3'$, $4'\,5'\,\gamma'\,6'$. Ciò risulta evidentemente dal §. 48. *Osservaz.* 2ª.

Osservazione 3ª. L'asse X*y* (fig. 6, e 2) sarà parimente parallelo al moto della lastra, e passerà per un

punto o' posto tra il centro di grandezza o, ed il lato anteriore n m della lastra nella linea $a\,a'$ che la dimezza longitudinalmente.

L' obbliquità della lastra non impedirà che il fluido non abbia eguale facilità a muoversi verso i due lati longitudinali l n, i m, e perciò il piano che separa questo fluido dovrà passare per la linea $a\,a'$ che divide per lungo e in due parti uguali la lastra. Riguardo al moto del fluido fuggente verso i due lati trasversali n m, li avviene tutto altrimenti. Per cagione dell' obbliquità della lastra il fluido avrà maggior difficoltà a fuggire pel lato anteriore n m, che per l'opposto posteriore l i, quindi il piano separante i due fluidi dovrà trovarsi tra il centro di grandezza o, ed il lato superiore n m. D' onde segue che l' asse $o'\,y$ (fig. 6) dovendo trovarsi in ambidue i piani suddetti sarà nella linea della loro intersecazione, e perciò tra 'l centro di grandezza o (fig. 2) ed il lato n m in un punto della linea $a\,a'$ che dimezza longitudinalmente la lastra.

Da ciò viene che le curve $\gamma\, n'\, \pi\, \upsilon$ (fig. 6) $1\, 2\, \gamma'\, 3$ descritte dalle molecole γ non potranno essere, come lo sono allorchè la lastra si muove direttamente, uguali ne simili alle curve $\gamma\, \varkappa'\, l'\, \pi'\, \upsilon'$, $1'\, 2'\, 3'$ descritte dalle particelle γ, $1'$ poste ad eguali distanze da $o'\,y$ come le prime.

Osservazione 4ª. Per le ragioni addotte nell' *Osservaz.* 5ª. del § precedente il peso del fluido incompressibile non potrà ne pure nel caso presente influire sul movimento ch' esso piglia nel passare dalla parte anteriore alla posterior della lastra.

Osservazione 5ª. Da molti sperimenti simili agli in-

dicati al §. 49 *Osservaz.* 5ª, risulta 1°. che la molecola γ moventesi verso n' descrive una curva per esempio $\gamma\pi'$ che tocca l'asse Xy in γ, e la lastra nella sua estremità n'. 2°. che la molecola γ moventesi verso l' descrive la linea $\gamma\alpha' l'$, della quale la porzione $\gamma\alpha'$ è curva, e tocca l'asse Xy in γ, e la superficie della lastra in α', e la porzione $\alpha' l'$ si applica, e coincide perfettamente colla superficie medesima. 3°. che la linea $\gamma n'$ è sensibilmente più corta della linea $\gamma\alpha' l'$. 4°. che le molecole, che si trovano in γ' percorrono le curve $\gamma' 3, \gamma' 6'$, poscia dai punti $3, 6'$ continuano a muoversi verso n', l' sempre aderendo alla superficie $3n'$, $6'l'$. 5°. che $3n'$ è minore di $6'l'$.

Osservazione 6ª. Gli spazj $\alpha'\gamma' n'$, $6'\gamma' 3$ rimarranno pieni di fluido, che si muoverà insieme colla lastra, e colla stessa sua velocità; e la velocità rispettiva sarà zero o infinitamente piccola nei punti $\alpha', 6', 3$ e crescerà progredendo da essi punti verso l', n'.

Art. II.

Dei varj generi di resistenza.

50. La resistenza che incontra un corpo urtandone un' altro è propriamente la quantità del moto ch'esso perde. Dunque tante saranno le specie di resistenza quante saranno le cagioni varie che produrranno questa perdita.

Ciò premesso gioverà l' osservare attentamente

1°. che la lastra eccitando nell' acqua il movimento di cui abbiamo parlato dovrà perderne una porzio-

ne del proprio per l'inerzia delle particelle di quel fluido, per l'attrito ch'esse particelle dovranno incontrare strisciando sulle porzioni $\alpha\, n'$, $\alpha\, l'$; $6\, n'$, $6'\, l'$ (fig. 5. tav. I) $\alpha'\, l'$, $3\, n'$, $3'\, l'$ (fig 6) della superficie anteriore e posteriore della lastra, e per la tenacità delle particelle che si separano in γ e di quelle si muovono per le curve $\gamma\, \alpha\, n'\, \pi\, v$, $1\, s\, 2\, 3$.

2°. che la lastra eccitando il moto nell'aria non potrà perderne del proprio se non per la sola inerzia, e pel solo attrito delle particelle di questo fluido.

Consta da esatti esperimenti che l' aria non è tenace; o non lo è sensibilmente.

3°. che in luogo della tenacità abbiamo nell' aria un'altra cagione per cui la lastra dovrà perdere del proprio moto, e questa si è la compressibilità insieme colla elasticità di questo fluido.

Per le cose già dette (§ 24), è manifesto che a cagione di queste proprietà la densità naturale dell' aria aumenta innanzi alla lastra, e si diminuisce dietro di essa. Ora per l' aumento della condensazione s' aumenterà la pressione contro la superficie anteriore della lastra e per la diminuzione della densità si diminuirà la pressione contro la superficie posteriore.

La lastra adunque dovendo vincere l' eccesso della prima pressione sopra la seconda perderà parte del suo movimento.

4°. che queste differenti pressioni non hanno luogo nell' acqua. Non nascendo in essa ne condensazione ne vacuo (§ 24) le pressioni contro la superficie anteriore e posteriore della lastra cagionate dal peso di questo fluido continueranno ad essere uguali, e ad agire in

direzioni diametralmente opposte l'una all'altra, come accaderebbe se l'acqua, e la lastra fossero in perfetta quiete.

Art. III.

Formole generali dalle resistenze.

51. Dall' articolo precedente risulta. 1°. che le lastre moventisi per l'acqua incontreranno tre specie di resistenza, l'una proveniente dall'inerzia dell'acqua, l'altra dall'attrito delle sue particelle, e la terza dalla loro tenacità. 2°. che le lastre moventisi per l'aria oltre le due resistenze cagionate parimente dall'inerzia, e dall' attrito delle particelle dell' aria ne incontreranno una terza prodotta dalla compressibilità, ed elasticità di questo fluido.

Resistenza d' inerzia.

52. Il fluido scorrente con moto variabile per $\gamma \alpha n$, $\gamma \alpha' l'$ (fig. 5), o sia per $\gamma n'$, $\gamma \alpha' l'$ (fig. 6) premerà la sezione anteriore $l'n'$ della lastra nella direzione oX diametralmente opposta al movimento della lastra, e il fluido moventesi parimente con moto variabile per $\gamma' 6 n'$, $\gamma' 6' l'$ (fig. 5) o per $\gamma' 3 n'$, $\gamma' 6' l'$ (fig. 6) premerà la superficie posteriore a seconda del movimento della lastra. chiamiamo

c la velocità della lastra

v, v' le velocità del fluido anteriore in due punti r, r' (fig. 5, 6), posti alle distanze e, e' da z, z'

u, u' le velocità del fluido posteriore nei due punti 3, 3′ posti alle distanze $\varepsilon, \varepsilon'$ da 6, 6′,

$$\int d\,e\left(\frac{c^2 - v^2}{2}\right),\ \int d\,e'\left(\frac{c^2 - v'^2}{2}\right)$$

due integrali presi in maniera, ch' essi svaniscano fatto $e=o$, $e'=o$, e si completino fatto $e=\alpha n'$, $e'=\alpha' l'$

Dalla nota teoria della pressione de' fluidi in movimento risulta

1°. che quando la lastra si muoverà direttamente la pressione dell' acqua, o dell' aria contro la sezione anteriore $l'n'$ della lastra sarà proporzionale ad

$$\alpha\alpha'\left(\frac{c^2}{2}\right) + \int d\,e\left(\frac{c^2 - v^2}{2}\right) + \int d\,e'\left(\frac{c^2 - v'^2}{2}\right)$$

e la pressione contro la sezione posteriore sarà

$$6\,6'\left(\frac{c^2}{2}\right) + \int d\,\varepsilon\left(\frac{c^2 - u^2}{2}\right) + \int d\,\varepsilon'\left(\frac{c^2 - u'^2}{2}\right).$$

2°. che quando la lastra si muoverà obbliquamente la pressione contro la sezione anteriore $l'n'$, sarà

$$6'\,6\left(\frac{c^2}{2}\right) + \int d\,e'\left(\frac{c^2 - v'^2}{2}\right),$$

e la pressione contro la sezione posteriore $l'n'$ sarà

$$6\,6'\left(\frac{c^2}{2}\right) + \int d\,\varepsilon\left(\frac{c^2 - u^2}{2}\right) + \int d\,\varepsilon'\left(\frac{c^2 - u'^2}{2}\right),$$

ma dai Signori Alembert *(a)*, e La-Grange *(b)* è di-

(a) Essai d' une nouvelle théorie de la résistance des fluides.
(b) Méchanique analytique.

mostrato che la resistenza opposta dall' inerzia del fluido al movimento d' un solido di figura qualunque è la pressione del fluido strisciante sulla superficie anteriore del solido diminuita della pressione del fluido strisciante sulla superficie posteriore, perciò la resistenza incontrata da una sezione qualunque $l'n'$ della lastra sarà

$$z\alpha'\left(\frac{c^2}{2}\right) + \int de\left(\frac{c^2 - v^2}{2}\right) + \int de'\left(\frac{c^2 - v'^2}{2}\right)$$

$$-66'\left(\frac{c^2}{2}\right) - \int d\varepsilon\left(\frac{c^2 - u^2}{2}\right) - \int d\varepsilon'\left(\frac{c^2 - u'^2}{2}\right),$$

quando la lastra si muoverà direttamente, ed

$$zn'\left(\frac{c^2}{2}\right) + \int de'\left(\frac{c^2 - v'^2}{2}\right)$$

$$-66'\left(\frac{c^2}{2}\right) - \int d\varepsilon\left(\frac{c^2 - u^2}{2}\right) - \int d\varepsilon'\left(\frac{c^2 - u'^2}{2}\right).$$

quando si muoverà obbliquamente.

Resistenza d' attrito.

53. Le sperienze di Mosschenbroek, e d'altri celebri Fisici provano bastantemente che l'attrito è proporzionale in parità di circostanze ad una funzione della velocità del corpo strisciante. Ciò posto suppongansi

$\Phi v, \Phi v', \Phi u, \Phi u'$ le funzioni cui sono proporzionali gli attriti in $r, r', 3, 3'$

$\int de . \Phi v, \int de . \Phi v'$ due integrali che divengano zero fatti $e = o$, $e' = o$, e si completino fatto $e = zn'$, $e' = z'l'$,

$\int d\varepsilon . \Phi u$, $\int d\varepsilon' . \Phi u'$ parimente due altri integrali che svaniscano fatti ε, ε' uguali a $6n'$, $6'l'$.

Per le suddette sperienze, quando la lastra si muoverà direttamente, la pressione prodotta dall' attrito sopra la sezione anteriore $l'n'$ sarà

$\int de . \Phi v + \int de' . \Phi v'$, e la pressione sopra la sezione posteriore sarà

$\int d\varepsilon . \Phi u + \int d\varepsilon' . \Phi u'$.

Quando poi la lastra si muoverà obbliquamente la pressione dell' attrito sopra la $l'n'$ anteriore sarà

$\int de' . \Phi v'$, e la pressione sopra la $l'n'$ posteriore sarà

$\int d\varepsilon . \Phi u + \int d\varepsilon' . \Phi u'$.

Dal che risulta manifestamente che la resistenza d' attrito sarà

$$(\int de . \Phi v + \int de' . \Phi v') - (\int d\varepsilon . \Phi u + \int d\varepsilon' . \Phi u')$$

pel moto diretto della lastra, e

$\int de' . \Phi v' - (d\varepsilon . \Phi u + \int d\varepsilon' . \Phi u')$ pel moto obbliquo.

Resistenza della tenacità.

54. La tenacità dell' acqua qualunque ne sia la cagione può considerarsi uguale in tutte le particelle. Perciò chiamata

t la tenacità d' una molecola qualunque,

n il n°. delle molecole che si staccano le une dalle altre quando la lastra si muove direttamente.

n' il n°. delle molecole che si staccano quando si muove obbliquamente, sarà

nt la tenacità di tutte le molecole staccantisi nel 1° caso, ed

$n't$ la tenacità di tutte quelle che si staccano nel 2°.

Similmente anche la tenacità, o aderenza colla superficie della lastra potrà considerarsi costante in tutti i punti, o elementi delle $\alpha n'$, $\alpha' l'$, $6' l'$, $6' l'$ (fig. 5) e delle $\alpha' l'$, $3 n'$, $6' l'$ (fig. 6). Perciò chiamata

t' la tenacità dell' acqua con uno qualunque dei suddetti elementi

$\alpha n' . t'$, $\alpha' l' . t'$, $6 n' . t'$, $6' l' . t'$ esprimeranno le tenacità con le porzioni intiere $\alpha n'$, $\alpha' l'$, $6 n'$, $6' l'$ quando la lastra si muove direttamente, ed

$\alpha' l' . t'$, $3 n' . t'$, $6' l . t'$ esprimeranno del pari le tenacità con le porzioni $\alpha' l'$, $3 n'$, $6' l'$ quando la lastra si muove obbliquamente.

Convien inoltre osservare che l'azione delle forze nt, $n't$, $\alpha n' . t'$, $\alpha' l' . t'$ si opporrà al moto della lastra, e quella delle forze $6 n' . t'$, $6' l' . t'$, $3 n' . t'$ cospirerà col suddetto movimento.

Per la qual cosa la resistenza prodotta dalla tenacità dell' acqua dovrà essere

$(nt + \alpha n' . t' + \alpha' l' . t') - (6 n' . t' + 6' l' . t')$ quando la lastra si muove direttamente, ed

$(n't + \alpha' l' . t') - (3n' . t' + 6' l' . t')$ quando la lastra si muove obbliquamente.

Resistenza prodotta dalla compressibilità ed elasticità dell' aria.

55. E' manifesto che l' aumento della densità dell' aria in un punto qualunque della superficie anteriore della lastra sarà una funzione della velocità che avrà l' aria nel punto suddetto.

Ciò premesso pei paragrafi 48, 49 l' incremento della densità in ogni punto della $\alpha\alpha'$ (fig. 5. tav. I) e della $\alpha' n'$ (fig. 6) sarà una funzione della sola velocità c della lastra, e l' incremento della densità in r (fig. 5) sarà una funzione di c, ed v, e in r' una funzione di c, ed v'.

chiamate

$\phi c, \phi(c, v), \phi(c, v')$ le funzioni che esprimono i suddetti incrementi, e

$\int de . \phi(c, v), \int de' . \phi(c, v')$ due integrali presi in maniera che diventino ϕc fatti e, ed e' uguali a zero, e si completino fatto $e = \alpha n', e' = \alpha' l'$, sarà

$\alpha\alpha' . \phi c + \int de . \phi(c, v) + \int de' . \phi(c, v')$ l'aumento della densità del fluido innanzi a tutta la $l' n'$ quando la lastra si muoverà direttamente, ed

$\alpha' n . \phi c + \int de' . \phi(c, v')$ sarà l'aumento suddetto quando la lastra si muoverà obbliquamente.

E' parimente manifesto che il decremento della densità dell' aria in un punto qualunque della super-

ficie posteriore della lastra sarà una funzione della velocità con la quale il fluido seguirà il punto suddetto. chiamiamo

c' la velocità del fluido innanzi ad un punto delle $66'$ (fig. 5), $6'3$ (fig. 6)

c'', c'''. le velocità innanzi ai punti $3, 3'$ (fig. 5), $6', 3$ fig. 6,

$\phi' c', \phi' c'', \phi' c'''$ le funzioni cui saranno proporzionali i decrementi della densità nei punti sopraindicati,

$\int d\varepsilon . \phi' c'', \int d\varepsilon' . \phi c'''$ due integrali presi in maniera ch'essi diventino $\phi c'$ fatti $\varepsilon, \varepsilon'$ uguali a zero, e si completino fatto $\varepsilon = 6n'$ (fig. 5) o pure $= 3n'$ (fig. 6) ed $\varepsilon' = 6'l'$ (fig. 5, 6)

Il decremento della densità del fluido sopra tutta la $l'n'$ sarà

$6'6 . \phi c' + \int d\varepsilon . \phi' c'' + \int d\varepsilon' . \phi' c'''$ quando la lastra si muoverà direttamente, ed

$6'3 . \phi c' + \int d\varepsilon . \phi' c'' + \int d\varepsilon' . \phi' c'''$ quando si muoverà obbliquamente.

Quindi, chiamata D la densità naturale dell'aria, la differenza delle pressioni contro la sezione $l'n'$ anteriore e posteriore della lastra, ossia la resistenza prodotta dall'eccesso della densità dell'aria anteriore sopra la posteriore sarà nel 1°. caso

$$[D + \alpha\alpha' . \phi c + \int de . \phi(c', v') + \int de' . \phi(c, v')]$$

$$-[D + 66' . \phi c' + \int d\varepsilon . \phi' c'' + \int d\varepsilon' . \phi' c''']$$

e nel 2°.

$$[D + \alpha n' . \phi c + \int d e' . \phi (c, v')]$$

$$- [D + 6' 3 . \phi c' + \int d \varepsilon . \phi' c'' + \int d \varepsilon' . \phi' c'']$$

ART. IV.

Perchè il centro della resistenza dell' acqua, e dell' aria debba cadere nel punto indicato dagli sperimenti.

56. Dall' articolo precedente risulta che la resistenza dell' acqua, e dell' aria è la differenza delle pressioni dei due fluidi contro la superficie anteriore, e posteriore della lastra. Inoltre è indubitato che il centro comune delle pressioni posteriori deve trovarsi nel punto stesso nel quale cade il centro comune delle pressioni anteriori. Infatti per tutto lo spazio percorso negli sperimenti (§ 39, 40) dalla lastra sempre ferma sotto lo stesso angolo il centro delle suddette pressioni dovea necessariamente trovarsi sull' asse d' equilibrio della lastra, altrimenti essa non avrebbe potuto mantenersi immobile sotto uno stesso angolo.

Da ciò si comprenderà agevolmente, che per soddisfare adequatamente alla presente ricerca basterà indagar la ragione per cui il centro di ciascuna delle pressioni contro la superficie anteriore, o pure (§ 48, 49 *Osservaz.* 1ª) contro una qualunque sezione $l' n'$ (fig. 5, 6) della lastra debba trovarsi nel punto rinvenuto con l' esperienza.

Perchè quando la lastra si muove direttamente il centro delle pressioni dell' acqua, e dell' aria debba cadere nel centro di grandezza della lastra.

Centro della pressione d' inerzia.

57. Quando la lastra si muove direttamente le pressioni cagionate dall' inerzia del fluido sopra le porzioni $o\alpha n'$, $o\alpha' l'$ (fig. 5) della sezione $l'n'$ sono

$$o\alpha\left(\frac{c^2}{2}\right)+\int de\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right),\quad o\alpha'\left(\frac{c^2}{2}\right)+\int de'\left(\frac{c^2-v'^2}{2}\right)\ (\S\ 52).$$

Inoltre $o\alpha = o\alpha'$, $\alpha n' = \alpha' l'$, $v = v'$ (§ 48, *Osservaz.* 4ª); quindi la pressione $o\alpha\left(\frac{c^2}{2}\right)+\int de\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$

sarà uguale e simile alla pressione

$o\alpha'\left(\frac{c^2}{2}\right)+\int de'\left(\frac{c^2-v'^2}{2}\right)$, e perciò il centro della pressione totale $\alpha\alpha'\left(\frac{c^2}{2}\right)+\int de\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)+\int de'\left(\frac{c^2-v'^2}{2}\right)$

(§ 52) prodotta dall' inerzia del fluido su tutta la $l'n'$ cadrà in o, cioè nel mezzo della $l'n'$.

Centro della pressione d' attrito.

58. Quando la lastra si muove direttamente le pressioni cagionate dall' attrito sopra le porzioni $\alpha n'$, $\alpha' l'$ sono

$\int de . \Phi v$, $\int de' . \Phi v'$ (§ 53);

ma, come abbiamo detto di sopra, $o\alpha = o\alpha'$, $\alpha n' = \alpha' l'$, $v = v'$ dunque la pressione $\int de \,.\, \Phi v$ sarà uguale e simile alla pressione $\int de' \,.\, \Phi v'$, e perciò il centro della pressione totale $\int de \,.\, \Phi v + \int de' \,.\, \Phi v'$ (§ 53) dell' attrito sopra tutta la $l' n'$ cadrà anch' esso nel punto o.

Centro della pressione proveniente dalla tenacità.

59. Quando la lastra si muove direttamente le pressioni prodotte dalla tenacità dell' acqua sulle porzioni on', ol', sono $mt + \alpha n' \,.\, t$, $m't + \alpha' l' \,.\, t$, supposto m, m' il n°. delle particelle delle due porzioni dell' acqua che si muovono sopra, e sotto l' asse Xy. Ciò posto si osservi che m, m' devono essere proporzionali al n°. ed alla lunghezza delle curve $\gamma \alpha n' \tau v$, $1 s 2 3$, ec., $\gamma \alpha' l' n' \tau' v'$, $1' s' 2' 3$ ec. descritte dalle particelle delle due suddette porzioni del fluido. Ora quando la lastra si muove direttamente le curve $\gamma \alpha n' \tau v$, $1 s 2 3$, ec. sono uguali e simili alle curve $\gamma \alpha' l' \tau' v'$, $1' s' 2' 3'$, ec. (§ 48 *Osservaz.* 5ª); dunque anche mt uguale e simile ad $m't$. Inoltre $\alpha n' = \alpha' l'$, perciò la pressione $mt + \alpha n' \,.\, t'$ uguale e simile alla pressione $m't + \alpha' l' \,.\, t'$, ed il centro della pressione totale $nt + \alpha n' \,.\, t' + \alpha' l' \,.\, t'$ cagionata (§ 54) dalla tenacità sopra tutta la $l' n'$ cadrà in o.

Centro della pressione proveniente dalla compressibilità, ed elasticità dell' aria.

60. Quando la lastra si muove direttamente le pressioni generate dalla compressibilità ed elasticità dell' aria sopra le porzioni on', ol' sono pel § 55

$[D + o\alpha . \phi c + \int de . \phi(c', v)], [D + o\alpha' . \phi c + \int de' . \phi(c', v')]$.
In oltre $o\alpha = o\alpha'$, $\alpha n' = \alpha' l'$, $c = c'$, $v = v'$, dunque la pressione $D + o\alpha . \phi c + \int de . \phi(c', v)$ uguale e simile alla pressione $[D + o\alpha' . \phi c + \int de' . \phi(c', v')]$, e perciò il centro della pressione totale

$$D + \alpha\alpha' . \phi c + \int de . \phi(c', v) + \int de' . \phi(c', v') \ (\S\ 55)$$

su tutta la $l'n'$ cadrà in o.

Perchè quando la lastra si muove obbliquamente il centro delle pressioni dell'acqua, e dell'aria debba cadere in un punto della superficie della lastra tra il centro di grandezza, ed il lato anteriore nella linea che la dimezza longitudinalmente.

Centro della pressione d'inerzia.

61. Quando la lastra si muove obbliquamente (fig. 6 tav. I) la pressione del fluido sulla metà superiore on' della $l'n'$ è $on'\left(\frac{c^2}{2}\right)$, ed $o\alpha'\left(\frac{c^2}{2}\right) + \int de'\left(\frac{c^2 - v'^2}{2}\right)$ la pressione sulla metà inferiore ol'; dal che apparisce evidentemente che essendo c^2 maggiore di $c^2 - v'^2$ anche $on'\left(\frac{c^2}{2}\right)$ sarà maggiore di $o\alpha'\left(\frac{c^2}{2}\right) + \int de'\left(\frac{c^2 - v'^2}{2}\right)$, e perciò il loro centro comune ossia il centro della pressione su tutta la $l'n'$ si troverà tra il centro di grandezza o, e l'estremità anteriore n' della lastra.

Centro della pressione d' attrito, e di tenacità.

62. Quando la lastra si muove obbliquamente la pressione dell' attrito agisce su la sola porzione $\alpha' l'$, ed è uguale a $\int de'.\Phi v'$ (§ 53); e la pressione proveniente dalla tenacità sopra la $o'n'$ è mt, ed $m't + \alpha' l'.t'$ la pressione sopra $o'l'$ (§ 54, 59).

Perciò la pressione proveniente dall' attrito e dalla tenacità sopra la $o'n'$ sarà mt, e sopra la $o'l'$ sarà $\int de'.\Phi v' + m't' + \alpha' l'.t'$. Queste due formole mostrano chiaramente che mt è minore di $\int de'.\Phi v' + m't' + \alpha' l'.t'$; e perciò il centro comune della pressione dell' attrito, e della tenacità sopra la $l'n'$ dovrà cadere sotto di o', per esempio in c. Ora vedremo che la distanza $o'c$ non potrà esser maggiore della $o'o$.

Siccome la pressione d' inerzia, maggiore contro la metà on' (§ precedente) allontana da o il centro della pressione d'inerzia su tutta la $l'n'$ per lo spazio oo', così ad ottenere che l' eccesso della pressione d' attrito e di tenacità contro ol' allontani da o' il centro della detta pressione contro tutta la $n'l'$ per uno spazio $o'c$ maggiore di $o'o$, converrà che le due pressioni prese insieme contro $o'l'$ siano maggiori della pressione d'inerzia contro la metà ol'; il che non potrà succedere giammai. Consta da esatti sperimenti che la resistenza opposta dall' attrito e dalla tenacità ad una stessa superficie è molto minore di quella opposta dall' inerzia, e minore di tanto, che quantunque la linea $o'l'$ sulla quale agisce l' attrito e la tenacità sia maggiore della linea ol' sulla quale agisce l' inerzia, l'eccesso però delle due linee non può essere per le cose dette di sopra così gran-

de da poter aumentare la resistenza d' attrito e di tenacità in modo che essa possa superare la resistenza d' inerzia sopra ol'. Dunque la distanza $o'c$ dovrà esser minore di oo', e perciò il centro comune delle due pressioni d' attrito e di tenacità contro $l'n'$ si troverà, come il centro della pressione d' inerzia, tra il centro di grandezza o, e l'estremità anteriore n'.

Centro della pressione prodotta dalla compressibilità ed elasticità dell' aria.

63. Quando la lastra si muove obbliquamente la pressione cagionata dall' aumento della densità del fluido sopra la metà on' sarà (§ 55) $on' . \phi c$, e la pressione sopra la metà ol' sarà $o\alpha' . \phi c + \int de' . \phi(c, v')$; ora convien osservare che ϕc deve esser maggiore di $\phi(c, v')$. Imperciocchè, per l'istesso § 55, ϕc esprime l' aumento della densità sopra ogni punto della $\alpha'n'$, e $\phi(c, v')$ quello sopra ogni punto della $\alpha'l'$. Ora la velocità v' colla quale il fluido fugge verso l'estremità l' della lastra è maggiore nei punti della $\alpha'l'$ più vicini alla estremità l', (§ 48) quindi nei suddetti punti dovrà esser minore l' aumento della densità; e perciò ϕc maggiore di $\phi(c, v')$, e per conseguenza la pressione $on' . \phi c$ sarà maggiore della pressione $o\alpha' . \phi c + \int de' . \phi(c, v')$ e il loro centro comune cadrà tra o ed n'.

Perchè aumentando la velocità della lastra che si muove sotto uno stesso angolo acuto il centro delle pressioni di ciascuno dei due fluidi debba cadere più vicino al centro di grandezza della lastra, e vieppiù vicino ad esso centro, quando la lastra si muove per l' acqua che quando si muove per l' aria.

64. Supposta C la velocità d' un corpo che si muove per un fluido qualunque, V la velocità d' una particella μ del fluido che fugge dalla parte anteriore alla posteriore del corpo, ed $\frac{V}{C} = \zeta$, la quantità ζ non dipenderà nè dalla massa del corpo, nè dalla densità del fluido, ma solamente dalla figura, e dal volume del corpo, e dalla posizione della particella μ *(a)*.

Ciò dovendo avverarsi anche nel caso che il solido sia una lastra che si muove sotto lo stesso angolo, è manifesto che nelle formole delle pressioni del fluido su la sezione $l'n'$ (fig. 6) indicate nei paragrafi precedenti si potrà sostituire in luogo della velocità del fluido il prodotto della velocità della lastra per la quantità ζ.

Fatte queste sostituzioni la pressione

$o\,\alpha'\,(\frac{c^2}{2}) + \int d\,e'\,(\frac{c^2 - v'^2}{2})$ (§ 60) prodotta dall' inerzia

del fluido su la metà inferiore $o\,l'$ si cangerà in

$o\,\alpha'\,(\frac{c^2}{2}) + \int d\,e'\,(\frac{c^2 - c^2\,\zeta^2}{2})$ o sia in

(a) Alembert opera citata al § 52.

$o\,\alpha\,(\frac{c^2}{2}) + \int c^2\, d\, e'\, (\frac{1-\zeta^2}{2})$, e la pressione $o\,n'\,(\frac{c^2}{2})$ su la metà superiore $o\,l'$ rimarrà la stessa. Or si supponga che la velocità c della lastra s'aumenti, s'aumenteranno anche le pressioni

$$o\,\alpha'\,(\frac{c^2}{2}) + \int c^2\, d\, e'\, (\frac{1-\zeta^2}{2})\ ,\ o\,n'\,(\frac{c^2}{2})\ ,$$

ma poichè c è l' istessa riguardo a tutti i punti della $l'n'$, e ζ è una funzione delle sole quantità che determinano la posizione dei suddetti punti, è evidente che gli aumenti delle pressioni sopra ciascun punto della $l'n'$ cagionati dall' aumento della velocità della lastra saranno uguali, e perciò il centro della pressione d' inerzia su tutta la $l'n'$ non potrà, aumentando la velocità della lastra, cangiar posizione.

Per le stesse ragioni, siccome è facile a rilevare, l' aumento della velocità della lastra non potrà far cangiare nemeno il centro della pressione cagionata dalla compressibilità, ed elasticità del fluido.

Quanto alla pressione della tenacità, abbiamo veduto (§ 62) che sopra la $o'n'$ essa è uguale ad $m\,t$, e sopra la $o'l'$ è uguale ad $m'\,t + \alpha'\,l'.\,t'$, e che inoltre m, m' sono proporzionali al numero, e lunghezza delle curve descritte dal fluido fuggente verso n', e verso l'. Ciò posto, poichè la velocità di una particella qualunque μ del fluido è proporzionale al prodotto della velocità della lastra in una funzione di quantità dipendenti dalla grandezza, e dall' angolo della lastra e dalla posizione della particella μ, è manifesto che variando la sola velocità della lastra le curve descritte dal

fluido rimaranno le stesse, e perciò le stesse anche le pressioni mt, $m't+\alpha'l'.t'$, e quindi nello stesso punto anche il loro centro comune.

Dal fin qui detto risulta che, aumentandosi la velocità della lastra, il centro della resistenza dovrà accostarsi al centro di grandezza soltanto a cagione dell' attrito del fluido sopra la porzione $\alpha'l'$.

In fatti sostituito $c\zeta$ in luogo di v' nella formola $\int de'.\Phi v'$ (§ 53) della pressione d' attrito sopra la $\alpha'l'$, essa diverrà $\int de'.\Phi c\zeta$; nella quale si scorge che aumentandosi la velocità c della lastra s' aumenterà la pressione $\int de'.\Phi c\zeta$, e perciò il centro comune di tutte le pressioni sopra $l'n'$ dovrà accostarsi ad l', o sia al centro o di grandezza.

Egli è poi facile a conoscere che essendo l'acqua molto più densa dell' aria anche l' attrito dell' acqua sarà maggiore di quello dell' aria, il che per cose dette farà che il centro della pressione sopra la $l'n'$ debba cadere più vicino al centro di grandezza quando la lastra si muoverà per l' acqua.

Perchè aumentando la lunghezza della lastra, o diminuendone la larghezza, il centro delle pressioni di tutti due i fluidi debba cadere meno lontano dal centro di grandezza.

65. Da esatti e ripetuti sperimenti simili ai descritti nel § 48 *Osservaz.* 6ª. risulta che aumentando la lunghezza della lastra, o scemandone la larghezza s' ingrandisce in maggior proporzione la $n'\alpha'$ (fig. 6), dimodochè in tutti due i casi la pressione su la metà in-

feriore ol' deve crescere (§§ precedenti) più della pressione su la metà superiore on', e per conseguenza il centro comune delle pressioni su tutta la $l'n'$ dovrà accostarsi alcun poco al centro o di grandezza.

PARTE II.

CONFRONTO DELLE FORMOLE CO' GLI SPERIMEMTI.

ART. I.

Confronto della formola ordinaria.

Differenza tra i risultati della formola, e quelli dello sperimento.

66. Supposta v la velocità uniforme della lastra; θ l'angolo aoy della superficie nmli colla direzione oy del suo movimento (fig. 1, 2, 7, 9 tav. I), secondo la formola ordinaria, qualsisia il fluido e la posizione del lato nm della lastra,
la resistenza diretta opposta dal fluido ad un differenziale qualunque α della superficie urtante è proporzionale ad αv^2, e
la resistenza obbliqua proporzionale ad $\alpha v^2 \sin^2\theta$.

D'onde chiaramente apparisce che essendo uguali le velocità, e l'angolo d'ogni differenziale, dovranno essere uguali anche le resistenze di tutti indistintamente gli elementi della superficie; e perciò il centro della resistenza totale tanto diretta che obbliqua secondo la

formola ordinaria dovrà cadere nel centro di grandezza della Lastra.

67. Paragonati questi risultati con quelli degli sperimenti, si fa manifesto che la formola ordinaria esprime il vero centro soltanto della resistenza diretta di tutti due i fluidi in qualunque posizione del lato minore della lastra.

Cagione di questa differenza.

68. I fisico-matematici, che colle loro investigazioni intorno alla resistenza de' fluidi giunsero a trovare la formola ordinaria, supposero tutti o espressamente o tacitamente 1°. che la pressione del fluido nascente dalla sua propria gravità non abbia influsso alcuno sopra la resistenza. 2°. che la velocità comunicata al fluido da ciascun elemento della superficie urtante si limiti alla sola velocità del solido normale agli elementi suddetti.

Se la prima ipotesi non è vera generalmente, lo è però nel caso che non succeda vacuo. Egli è dimostrato 1°. che le due pressioni opposte si equilibrano quan do il corpo è in movimento, come quando è in quiete (§ 50); 2°. che le pressioni suddette non cangiano in alcun modo il movimento del fluido che fugge dalla parte anteriore alla posteriore del solido (§ 48, 49). D' onde segue che la gravità del fluido non può avere influsso veruno sulla resistenza.

Quanto alla seconda ipotesi, non v' ha dubbio alcuno che il solido non debba eccitare nel fluido quella velocità, ma è altrettanto certo (§ 48, 49) che oltre a questa velocità esso fluido ne acquista un'altra ed è quel-

la colla quale passa dall' anteriore alla posterior parte del solido.

Dal che viene per legittima conseguenza 1°. che la formola ordinaria non abbracciando siffatta velocità nel calcolo della resistenza, le resistenze di tutti gli elementi della superficie urtante sarebbero tra loro uguali, e perciò il centro della resistenza totale tanto diretta che obbliqua dovrebbe cadere nel centro di grandezza, come si ha dalla formola. 2°. che mettendo a calcolo quella velocità, il centro della resistenza diretta deve cadere nel centro di grandezza, e quello della resistenza obbliqua fuori di questo.

Da ciò manifestamente apparisce che l'omissione di questa velocità debb'essere la cagion principale per cui la formola non può esprimere il vero centro di resistenza, se non quando la lastra si muove ad angolo retto.

Art. II.

Confronto della formola di Juan.

Differenza tra i risultati della formola, e quelli dello sperimento.

69. Supposta, come al § 57, v la velocità della lastra, θ l'angolo aoy (fig. 1, 2, 7, 9. tav. I) ed inoltre p la distanza di un elemento qualunque α della superficie della lastra dal livello del fluido; qualunque sia il fluido e la posizione del lato nm, secondo la teoria di Juan la resistenza diretta dell' elemento α dev' esser proporzio-

nale ad $\alpha v \sqrt{p}$, e la resistenza obbliqua proporzionale ad $\alpha v \sqrt{p}$ sen θ (a).

Per la qual cosa essendo uguali le velocità e gli angoli di tutti indistintamente gli elementi, le resistenze tanto dirette che obblique non potranno variare se non se per le differenti distanze degli stessi elementi dal livello del fluido.

Quindi è 1°. che per tutte tre le posizioni del lato, la metà inferiore lbb'i della lastra (fig. 1,2,9) come la più distante che la metà superiore dal livello ST del fluido, dovrà incontrare maggior resistenza della metà superiore; 2°. che per la posizione orizzontale e verticale del lato le due metà laterali lnaa', a'ami (fig. 1); ilbb', b'bnm (fig. 7) come egualmente distanti dal livello del fluido, incontrerano ugual resistenza; 3°. che per la posizione obbliqua del lato della lastra, la metà inferiore laterale a'ami (fig. 9), come più distante che l'altra metà lnaa' dal livello del fluido, incontrerà maggior resistenza. Ond'è, che secondo la formola di Juan per la posizione orizzontale e verticale del lato, il centro della resistenza tanto diretta che obbliqua deve cader fuori del centro di grandezza in qualche punto, per esempio c (fig. 1, 2, 7) della linea che dimezza verticalmente la lastra, e tra 'l centro di grandezza di questa ed il lato inferiore, ed inoltre che per la posizione obbliqua del lato, il centro di resistenza dovrà cadere parimente fuori del centro di grandezza su qualche punto, per esempio c (fig. 9) della quarta parte inferiore a'ob'i della superficie della lastra.

(a) *Examen maritime, théorique et pratique, ec. par Don Georges Juan ec. traduit par M. Levêque ec. Nantes. 1783.*

70. Non è difficile a conoscere che il centro di resistenza deve riporsi matematicamante nelle due predette posizioni tanto per l'acqua, che per l'aria. Nulladimeno, perciò che spetta all'aria convien riflettere, che per cagione della grande altezza dell'atmosfera le distanze p di tutti indistintamente gli elementi α della superficie della lastra possono considerarsi eguali, e perciò (§ 69) eguali le resistenze di tutti i punti suddetti, e quindi il centro di resistenza diretta, ed obliqua dell' aria atmosferica dovrà cadere per tutte le posizioni del lato nel centro di grandezza.

71. Paragonati questi risultati con quelli degli sperimenti, si rileverà manifestamente che la formola di Juan non somministra il vero centro, se non della resistenza diretta dell'aria per tutte le posizioni del lato della lastra.

Cagioni di questa differenza.

72. Supposto, come al § 69, α un elemento della superficie anteriore della lastra, il quale sia lontano per tutta la linea p dalla superficie di livello, ed in oltre α' un eguale elemento della superficie posteriore situato ad egual distanza p dal livello del fluido; le ipotesi sulle quali fondasi la formola di Juan sono 1°. che l'elemento anteriore debba soffrire una pressione poporzionale ad $\alpha\left(\sqrt{p}+\frac{1}{8}v\right)^2$ quando la lastra si muove direttamente colla velocità v; ed $\alpha\left(\sqrt{p}+\frac{1}{8}v \operatorname{sen}\theta\right)^2$ quan-

do si muove obbliquamente sotto l'angolo acuto θ. 2°. che l' elemento posteriore α' debba soffrire una pressione proporzionale ad $\alpha'(\sqrt{p}-\frac{1}{8}v)^2$ quando si muove ad angolo retto, ed $\alpha'(\sqrt{p}-\frac{1}{8}v\ sen\ \theta)^2$ quando si muove sotto l' angolo θ. In fatti non potendo la resistenza assoluta non essere che uguale alla differenza di queste pressioni, s' avrà per la resistenza diretta d' un elemento α anteriore della lastra,

$$\alpha\left[(\sqrt{p}+\frac{1}{8}v)^2-(\sqrt{p}-\frac{1}{8}v)^2\right]=\frac{\alpha v}{2}\sqrt{p},$$

e per la resistenza obbliqua si avrà

$$\alpha\left[(\sqrt{p}+\frac{1}{8}v\ sen\ \theta)^2-(\sqrt{p}-\frac{1}{8}v\ sen\ \theta)^2\right]$$

$=\frac{\alpha v}{2}\sqrt{p}\ sen\ \theta$, che sono le formole del § 69 *(a)*.

Intorno a queste due fondamentali ipotesi di Juan rifletteremo prima d'ogni altra cosa racchiudersene in quelle, due altre: 1°. che le pressioni suddete sieno funzioni della gravità del fluido e velocità del solido: 2°. ch'esse funzioni sieno quali vengono supposte dal istesso Juan. Ciò basta a far conoscere con evidenza come ambedue le ipotesi sieno false. Riguardo alla prima è dimostrato (§ 52) che le pressioni del fluido contro i due elementi anteriore, e posteriore sono funzioni della velo-

(a) Vedi l' opera dell' Autore citata al § 60.

cità del fluido e di quella del solido. Quanto alla seconda rifletteremo che dev' esser falsa perchè la differenza di quelle funzioni esprimendo la resistenza non deve contenere la p (§ 50).

Da ciò segue esser falsa la formola di Juan sì perchè non entra in essa la velocità del fluido, come perchè contiene la p. Quanto alla 1ª. abbiam veduto (§ 68) che, malgrado la sua falsità, il centro di resistenza d'entrambi i fluidi cader deve nel centro di grandezza solamente quando muovesi la lastra ad angolo retto, e malgrado la falsità della seconda, deve cadere in quel punto solamente muovendosi per l' aria.

Art. III.

Confronto della formola di Romme.

Differenza tra i risultati della formola, e quelli dello sperimento.

73. Questo matematico non ha, per quanto io sappia, determinato analiticamente se non la resistenza incontrata da' parallelepipedi moventisi parallelamente a se stessi e terminanti nelle loro facce anteriori o in superficie piana o in cuneo formato da due piani verticali ed eguali. Non è del mio assunto il ragionare per ora delle formole che esprimono quella resistenza; e però mi riserbo di confrontarle coll'esperienze delle susseguenti memorie nelle quali si tratterà del centro di resistenza incontrata da così fatti solidi. E' necessario intanto l' osservare che la formola che riguarda il pri-

mo de' suddetti prismi deve, secondo gli stessi principj di Romme, esprimere anche la resistenza diretta che soffre una sottil lastra rettangolare moventesi orizzontalmente e per linea retta; poichè per una parte la lastra non è che un parallelepipedo di picciolissima lunghezza, e per l' altra, secondo la teorìa di Romme, la lunghezza qualunque sia non altera punto la resistenza qualora il parallelepipedo si muova a seconda della lunghezza medesima.

74. Supposta dunque lm (fig. 1. tav. I) la faccia anteriore di un parallelepipedo divisa parallelamente ai lati trasversali nm, li in tanti rettangoletti tutti d' eguale e picciolissima altezza; α il rettangoletto ee'; K una funzione costante della tenacità del fluido e della sua specifica gravità; 90 un quarto del cerchio descritto col centro o' in un piano orizzontale; secondo la teorìa di Romme la resistenza diretta incontrata da questo rettangoletto dev' essere proporzionale a $\frac{K \alpha v^2}{90}$ (a); e tale pure, per le cose dette di sopra, dovrà essere secondo i principj di Romme la resisteuza d' un rettangoletto della superficie anteriore della lastra lm.

Da questa formola risulta manifestamente che essendo eguali per ogni rettangoletto tanto v che K, e 90, dovranno altresì essere eguali le resistenze di tutti i rettangoletti, e perciò il centro di resistenza di tutta la lastra dovrà trovarsi nel centro o di sua grandezza.

75. Confrontando questi risultati della formola di Romme con quelli dei nostri sperimenti, evidentemen-

(a) *Art de la Marine. Par M. Romme, Rochelle. 1787.*

te si scorge che una tal formola esprime con verità il solo centro della resistenza totale della lastra. Dove però si tratti della resistenza incontrata da ciascuna parte di essa lastra, la formola di cui parliamo non si accorda punto con gli sperimenti.

Cagioni di queste differenze.

76. Supposto α' il rettangoletto della faccia posteriore del prisma corrispondente al rettangoletto α (§ 74) della faccia anteriore; p la distanza di ciascuno di que' rettangoletti dal livello del fluido; h l'altezza dovuta alla velocità del prisma, Romme pone per principio fondamentale della sua teoria; 1°. che la pressione del rettangoletto anteriore del prisma dev' essere $K\alpha(p+h)$; quella del posteriore $K\alpha'(p-h)$; 2°. che la resistenza d' uno strato del prisma sia in ragion diretta della differenza di queste pressioni, ed in ragione inversa della facilità, o ciò che torna lo stesso, della velocità con la quale il fluido anteriore si ritira per lasciar libero al solido il passaggio. *(a)*

Da ciò ad evidenza raccogliesi che la pressione totale tanto del rettangoletto anteriore quanto del posteriore, da cui propriamente deve nascere la resistenza, sarebbe, secondo Romme, una funzione della gravità del fluido, della sua velocità, e della velocità della lastra. Essendo ciò conforme al vero (§ 52), ne segue di legittima conseguenza che la cagione per cui la formola di Romme non porge il vero centro della resi-

(a) Vedi l' opera citata.

stenza totale, non può essere perchè fra gli elementi costituenti la vera resistenza siasi trascurata, come si fece nel calcolo della formola ordinaria, la velocità del fluido, ma bensì, o perchè la funzione rinvenuta da Romme non sia la vera, o perchè sia falso, che la facilità o velocità colla quale il fluido fugge sia proporzionale a 90.

Ma è facile il conoscere che la cagione ricercata è principalmente quest' ultima. Dal ragionamento del § 48, *Osservaz.* 3ª, e da quello di Romme, risulta che la facilità del fluido nel cedere al moto della lastra non è uguale per ogni elemento indistintamente della superficie anteriore, ma cresce gradatamente dal centro di grandezza andando verso l' estremità. Ora il 90 non esprime già, secondo Romme, le differenti facilità, ma il solo medio di esse. Dunque la cagion principale per cui i risultati della formola di Romme discordano da quelli de' nostri sperimenti, consiste in questo che la facilità colla quale il fluido fugge da qualunque punto della superficie non è proporzionale a 90.

PARTE III.

ERRORI NEGLI USI DELLE FORMOLE, E LORO RETTIFICAZIONI.

Art. I.

Dell' azione de' Remi a pale di figura rettangolare.

77. L' azione de' remi può riferirsi o all' uso di forza motrice per eccitare e mantenere nella nave un movimento progressivo per una data direzione, o all' uso di timone cui si fanno servire nelle piccole barche per deviarle dal movimento progressivo in esse eccitato o da' remi stessi o dal vento, e far prendere ad esse un' altra direzione qualunque.

Dell' azione de' remi ad uso di forza motrice.

78. La linea ab (fig. 1. tav. III) rappresenti il remo.

f il punto sulla sponda della nave intorno al quale si fa vibrare;

fk una linea parallela alla spina QP della nave ed al suo movimento;

bfk l' angolo sotto il quale il remo incomincia la sua vibrazione;

bb' l' arco della vibrazione;

pb la lunghezza della pala tutta immersa nell' acqua e giacente in un piano verticale;

a il punto nel quale è applicata l'azione del remigante.

Chiamisi $af=b$; $fb=a$; $fx=x$; u l' altezza dovuta alla velocità della estremità a nel percorrere l' arco aa'; sarà $\frac{a\sqrt{u}}{b}$ l' altezza dovuta alla velocità del punto b; ed $\frac{x\sqrt{u}}{b}$ l' altezza dovuta alla velocità del punto x la quale si supporrà proporzionale alla linea xn perpendicolare ad xb. La linea xh parallela alla fk rappresenti la direzione nella quale si muove la nave, ed v l' altezza dovuta alla sua velocità, la quale suppongasi proporzionale ad xm.

Egli è manifesto 1°. che il punto x della pala, a cagione dei due movimenti, l' uno per xm comune con quello della nave, l'altro per xn, urterà l'acqua nella direzione xl diagonale del parallelogramo formato sopra i due lati xm, xn, e con una velocità proporzionale alla stessa xl: 2°. che supposta l la larghezza della pala, ogni punto del elemento ldx della superficie di essa pala preso ad una distanza indetermitata x da f, avrà l' istessa velocità e direzione xl, vale a dire ch' esso elemento urterà l' acqua colla velocità $\frac{x\sqrt{u}}{b}$ sotto l'angolo acuto lxf, il cui seno si troverà

$$=\frac{\frac{x\sqrt{u}}{b}-m\sqrt{v}}{\sqrt{\frac{-2vmx\sqrt{uv}}{b}+\frac{xxu}{bb}}};$$

supposto m il seno dell' angolo hxf.

79. Ciò presupposto, i Matematici *(a)* che per la misura della resistenza d'un elemento qualunque della pala adottarono la formola ordinaria, ne supposero il centro in quel punto della superficie della pala stessa, nel quale si troverebbe, qualora ciascun elemento della medesima superficie incontrasse una resistenza proporzionale ad

$$l\,d\,x\left(\frac{x\sqrt{u}}{b}\right)\frac{\left[\frac{x\sqrt{u}}{b}-m\sqrt{v}\right]}{\left(\frac{-2\,m\,x\,v}{b}\sqrt{u\,v}+\frac{x\,x\,u}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

se questa supposizione sia vera ed esatta si conoscerà facilmente, dove riflettasi prima di tutto che, per le cose dette di sopra, la pala del remo dev' esser considerata come un piano rettangolare $p\,b$ che si muova immerso indefinitamente nell' acqua tranquilla per le direzioni $x\,l$ oblique alla superficie urtata $p\,b$; 2°. che per l'obbliquità dell' urto dovendo l'acqua incontrare (§ 49 *Osservaz.* 3ª) maggior difficoltà a fuggire per l'estremità anteriore p del piano di quella che incontrerebbe fuggendo per l'estremità esteriore b, la resistenza sopra ciascun elemento d'una porzione, per esempio $o\,p$, dovrà esser maggiore di quella che somministra la formola sopraddetta, e viceversa la resistenza degli elementi dell' altra porzione $o\,b$ dovrà esser minore. Da ciò segue evidentemente che il centro di re-

(a) Euler. Scientia Navalis ec.

sistenza della pala dovrà cadere ad una distanza dall' ipomoclio f del remo, minore di quella che porge la formola ordinaria.

80. Con gli stessi ragionamenti si rileverà che il centro di resistenza rinvenuto colla formola di Juan dovrà trovarsi anch' esso ad una distanza dall' istesso ipomoclio maggiore della vera.

81. Dal fin qui detto si potrà ancora raccogliere che il solo caso nel quale il centro di resistenza dovrebbe trovarsi nel punto determinato da ciascuna delle due formole, sarà quello della pala di picciola lunghezza, e del remo vibrato per un arco piccolo e parallelo alla spina della nave. In fatti egli è chiaro che allora ciascun elemento della superficie della pala urtando l' acqua direttamente con velocità prossimamente uguali, il centro di resistenza del fluido medesimo si potrà supporre nel centro di grandezza, quale si ha appunto dalle formole di cui si parla.

82. Per rilevare con qualch' esempio come la differenza tra il vero centro di resistenza, e quello delle adottate teorie possa rendere inesatte e fallaci le soluzioni de' problemi riguardanti l' azione de' remi, sceglierò la ricerca fatta dall' Eulero del numero de' remiganti richiesto a muovere una nave od altro bastimento qualunque con una data velocità.

Supposto

M il peso della nave;

V il volume della porzione di essa immerso nell' acqua;

2Ψ il numero dei rematori;

p la forza che dovrebbe un rematore impiegare nel muovere un remo fuor d' acqua,

a l' altezza d' un piede incirca,

ff una superficie piana la quale, muovendosi colla velocità della nave, incontrerebbe una resistenza uguale a quella della nave medesima,

g la larghezza della pala del remo,

h la sua lunghezza,

f la distanza fp (fig. 1. tav. III) del centro di moto del remo dall' estremità interiore della pala,

m il seno dell' angolo hxf della lunghezza del remo colla spina della nave,

n il suo coseno,

$$i = f - \frac{mh\sqrt{v}}{\sqrt{u}},$$

pel calcolo istituito dall' Eulero *(a)* a risolvere l' anzidetto problema risultano le due seguenti equazioni.

$$pb(1-u) = \frac{ghu}{bb}(ii + ih + \tfrac{1}{3}hh)\left(\frac{f + \frac{1}{2}iih + \frac{2}{3}ihh + \frac{1}{4}h^3}{ii + ih + \frac{1}{3}hh}\right) \ldots (1)$$

(a) Scientia navalis. Cap. de actione remorum.

$$\frac{M\,ff\,v}{V} = \frac{2\Psi\,p\,b\left(1-\frac{u}{a}\right)}{f+\dfrac{\frac{1}{2}i^2h+\frac{2}{3}ihh+\frac{1}{4}h^3}{ii+ih+\frac{1}{3}hh}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Rinvenuta col mezzo della prima la u, e sostituito nella seconda il suo valore, questa si cangerà in un' equazione che ci porgerà il valore ricercato di 2Ψ dato per la sola v, e per le dimensioni del remo.

Ciò permesso agevolmente ci si darà a conoscere quanto siffatto valore sia inesatto, solo che si osservi come la quantità

$$f+\frac{\frac{1}{2}iih+\frac{2}{3}ihh+\frac{1}{4}h^3}{ii+ih+\frac{1}{3}hh}$$

contenuta nell' equazioni (1), (2) esprime la distanza dell' ipomoclio f del remo dal centro di resistenza della sua pala, rinvenuta colla formola ordinaria.

Ora una tal distanza essendo (§ 79) maggiore della vera, si rileverà facilmente 1°. che anche il valore di 2Ψ rinvenuto col mezzo dell'equazioni (1), (2) dovrà essere inesatto; 2°. che supposto λ la differenza tra la vera distanza del centro di resistenza e quella dedotta dalla formola, ad ottenere il giusto e preciso valore di 2Ψ basterà sostituire nell' equazioni (1), (2)

$$f+\frac{\frac{1}{2}iih+\frac{2}{3}ihh+\frac{1}{4}h^3}{ii+ih+\frac{1}{3}hh}-\lambda \text{ in luogo di}$$

$$f+\frac{\frac{1}{2}iih+\frac{2}{3}hh+\frac{1}{4}h^3}{ii+ih+\frac{1}{3}hh}.$$

83. Per rinvenire λ, osserveremo primieramente che chiamata $pt=d$ la distanza dal punto nella lunghezza pb della pala, il quale abbia la velocità media tra le due velocità massima e minima delle estremità p, b, si potrà supporre che ogni punto, o elemento della palla si muova colla stessa velocità rotatoria, la quale sarà $\frac{d\sqrt{u}}{b}$. 2°. che il seno dell'angolo

$$lxp=\frac{\frac{x\sqrt{u}}{b}-m\sqrt{v}}{\sqrt{\frac{-2vmx\sqrt{uv}}{b}+\frac{ddu}{bb}}} \quad (\S\ 78)$$

cangiandosi per tale ipotesi in

$$\frac{\frac{d\sqrt{u}}{b}-m\sqrt{v},}{\sqrt{\frac{-2vmd\sqrt{uv}}{b}+\frac{ddu}{bb}}},$$

l'angolo stesso potrà bensì considerarsi costante o uguale per ogni elemento della pala, ma non già per ogni

punto dello spazio $b b'$ ch' essa percorre, mentr' è evidente, che la pala $p b$ accostandosi in ogn' istante della sua vibrazione alla $f k$, dovrà pure ad ogn' istante diminuirsi l' angolo $k f b$; o sia il seno m, e quindi variare anche l' angolo $l x p$ nella cui espressione entra m. 3°. finalmente che chiamato ϕ il valore dell' angolo $l x p$ medio tra tutti i differenti valori ch' esso assumerà, si potrà supporre che la pala si muova sotto quello stesso angolo ϕ in tutto il tempo della sua vibrazione.

Queste riflessioni dimostrano chiaramente che per rinvenire la cercata distanza del centro di resistenza del remo, basterà detterminare il centro di resistenza d' un piano rettangolare della grandezza della pala che si muova per l' acqua sotto l' angolo ϕ e colla velocità $\frac{d\sqrt{u}}{b}$, il che secondo le cose dette si otterrà o col mezzo degli sperimenti del § 39, o di altri istituiti cogli apparecchj che hanno servito per quelli.

Dell' azione dei remi ad uso di timone.

84. QP (fig. 4. tav. III) rappresenti la spina della barca, e la direzione del suo movimento progressivo;

Q la poppa;

P la prora;

$a b$ il remo;

f il suo ipomoclio;

$p\,b$ la pala;

Per far prendere alla barca una direzione per esempio $\textsc{c}\,h'$, differente dalla $\textsc{c}\,\textsc{p}$, s' immerge verticalmente la pala $p\,b$, e si tien ferma sotto un dato angolo $b\,c\,\textsc{q}$, cosicchè formando essa con la barca un corpo solo, si muova con la velocità e nella direzione $x\,h$ della barca medesima.

Essendo la pala un piano rettangolare che si muove per l' acqua e sotto un angolo acuto $h\,x\,p$ con un de' lati inclinato all' orizzonte, è manifesto pel § 66 che il centro della resistenza incontrata dalla pala cadrà nel centro di sua grandezza, secondo la formola ordinaria; e fuori di questo centro in qualche punto della quarta parte inferiore della pala, secondo la formola di Juan (§ 69), quando pe' nostri sperimenti dee trovarsi tra il centro di grandezza ed il lato anteriore p in un punto della linea che dimezza longitudinalmente la pala.

85. Per far conoscere che una tal differenza tra il vero centro di resistenza della pala e quello delle formole deve necessariamente rendere inesatte le soluzioni de' problemi risguardanti l' azione di tal sorta di timone, sceglieremo la ricerca della forza che deve il timoniere impiegare nel tener fermo il remo sotto l' angolo $b\,c\,\textsc{q}$.

Supposto s il seno di quest' angolo, u il suo coseno, $h\,h$ la superficie della pala, v l' altezza dovuta alla velocità della barca, secondo la formola ordinaria la resistenza della suddetta superficie sarà proporzionale ad $h\,h\,v\,s^2$. Inoltre, supposto o il centro del-

la resistenza secondo la suddetta formola, ed $fo=k$; f la lunghezza del braccio interiore del timone, P la forza ricercata del timoniere, si avrà $P=\frac{M}{V}hhvs^2.\frac{k}{f}$.

Ora la vera distanza del centro o di resistenza non essendo già k ma $k-\lambda$ (supposta λ come al § 82, la differenza tra la vera distanza del centro di resistenza e quella della formola) è manifesto, 1°. che la forza rinvenuta colla suddetta formola sarà maggiore della vera di tutta la quantità $\frac{Mhhvs^2\lambda}{V}$; 2°. che a rendere esatta la soluzione di questo problema converrà sostituire nella formola sopra esposta in luogo di k la distanza $k-\lambda$.

86. Egli è poi manifesto che per ritrovare λ basteranno gli sperimenti del § 39, od altri simili, se la grandezza e velocità della pala non fosse uguale per avventura a quella delle lastre.

87. Un' altro problema ancora più importante, la cui soluzione rinvenuta colla formola ordinaria sarebbe erronea, è quello in cui si cercasse la grandezza dell' angolo bcQ che deve render massima l' azione del timone.

E primieramente si osserverà che, supposto G il centro di gravità della barca, l' impulso dell' acqua nella pala farà ruotare la barca intorno ad un asse verticale che passa per G, dimodochè la direzione della barca per GP (§ 75) declinerà verso h'.

Ciò premesso, supposta $fG=a$; $of=k$, ed u, come sopra, il coseno dell' angolo Qcb, il momento della

forza sollecitante sarà, secondo la formola ordinaria, $\frac{M}{V}\, hhvs^2\,(au+k)$, *(a)*.

Donde apparisce che, affinchè l'angolo ricercato possa produrre il massimo effetto, dovrà rendere un massimo l'espressione $s^2\,(au+k)$, ossia $(1-u^2)(au+k)$. Differenziando quest'espressione ponendo variabile la u, somministrerà pel valor massimo di

u, $u = \frac{-k}{3a} + \sqrt{\frac{k^2}{9a^2} + \frac{1}{3}}$; Dal che risulta che la vera

distanza del centro di rotazione essendo $k-\lambda$ non k, il coseno u, e perciò l'angolo corrispondente differirà dal vero.

ART. II.

Teoria de' cervi volanti.

88. A B (fig. 5. tav. III) rappresenti in profilo il cervo volante, o sia un piano di figura pressochè rettangolare, inclinato all' orizzonte d'un angolo qualunque A iy, diviso in due parti uguali e simili da una linea A B, e tenuto ad una data altezza dall' orizzonte dall' impulso del vento, che si suppone spirare orizzontalmente. I due celebri matematici che hanno sommesse al calcolo le leggi dell' equilibrio di questa macchina, il Sig. Alberto Eulero *(b)*, ed il Sig. Giorgio Juan *(c)*, sup-

---

(a) *Eul. Scientia navalis cap. de actione gubernaculi.*

(b) *Mémoires de l' académie royal des sciences et belles-lettres de Berlin; an. 1756.*

(c) *Examen maritime ec.*

posero che qualunque sia l' angolo A$i$$y$, sotto il quale il piano A B è urtato dal vento, il centro del suo impulso cada e si mantenga nel centro di grandezza del piano istesso.

Non incontreremo difficoltà alcuna a rilevare che questa supposizione è falsa. Secondo i principj adottati dai suddetti matematici, sia che l' aria urti il piano con una data velocità, o che il piano urti l' aria tranquilla sotto l' istesso angolo, è una cosa medesima. Ora dai nostri sperimenti risulta che il centro della resistenza che incontrerebbe A B muovendosi per i y dee cadere non già nel centro di grandezza, ma tra esso centro, e l' estremità anteriore A.

Passiamo intanto ad esaminar brevemente a quali errori debbano soggiacere per tale ipotesi i risultati delle teorie dei due autori, e come possano esseer rettificati.

Teoria dell' Eulero.

89. La teoria dell' Eulero risguarda tre casi. Nel primo l' autore si limita all' ipotesi, che il cervo volante sia attaccato in qualche punto i del diametro ad una corda i F; che la corda non sia grave nè perciò si componga in una curva; e che tutta la macchina, cioè il piano A B e la corda i F formino un corpo rigido di maniera che l' angolo A i F della corda col piano A B sia sempre uguale a qualunque altezza si trovi A B.

In questa parte della sua teoria l' autore si propone di determinare l' angolo della corda col piano del cervo volante, ond' esso possa salire alla massima altez-

za, e la tensione della corda o sia la forza richiesta per sostenere alla massima altezza il cervo medesimo.

Per risolvere il primo problema l'autore chiama

θ l'angolo A i F della corda col piano A B;

ϕ l'angolo A i y d'inclinazione della A B coll'orizzonte;

$a\,a$ l'area del piano urtata dal vento;

v l'altezza dovuta alla velocità del vento;

P il peso del cervo;

$a\,a\,v\,sin^2\,\phi$ l'urto del vento;

p il centro di gravità del cervo;

c quello dell'impulso del vento;

$c\,p = b$;

$c\,i = c$;

f la lunghezza della corda;

e ritrova

$$v = \frac{P\,(f + (b + c)\cos\theta)}{a\,a\,sin^2\theta\,(f\cos\theta + c)} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Indi dimostra che, affinchè il cervo volante possa inalzarsi colla più grande facilità nell'aria, l'angolo θ dovrà esser preso in maniera che il valore di v espresso dalla suddetta equazione divenga un minimo.

Con questa condizione l'autore dimostra che l'angolo ricercato dovrà essere di 54°, 44'.

Per rilevare se questo valore sia il vero, convien riflettere che nel suo calcolo l'Eulero suppone la lun-

ghezza della corda così grande, che relativamente ad essa gl' intervalli b, c possano esser negletti rapporto ad f, e ad $f \cos\theta$, dimodochè l' equazione (A) dalla cui differenziazione, facendo variabile v, e θ, egli deduce il suddetto valore dell' angolo θ, non è già

$$v = \frac{P(f + (b + c)\cos\theta)}{a\,a\,\sin^2\theta\,(f\cos\theta + c)}$$

ma bensì

$$v = \frac{P}{a\,a\,\sin^2\theta\cos\theta}$$

Ciò posto, è manifesto che non trovandosi più in essa l' espressioni b, c, della distanza del centro di resistenza, il valore di θ ritrovato colla detta equazione dovrà verificarsi in qualunque sito cada il centro di resistenza, e che perciò sarà giusto il valore dell' angolo rinvenuto dall' autore.

90. Nel secondo caso l' Eulero suppone che non solo tutta la macchina possa muoversi liberamente intorno ad f, ma si bene che anche il piano A B possa rotare intorno al punto i nel quale è attaccata la corda che ora suppone grave ma incapace di conformarsi nella curva catenaria.

In questo caso egli si propone tra l' altre cose di trovare il punto in cui si deve attaccare la corda, onde il cervo volante possa salire alla massima altezza.

Supposto, che b, c, P ritengano i significati del § precedente, e che inoltre Q esprima il peso della corda; l' Eulero dimostra *(a)*, che per rendere l' angolo Φ

(a) Mémoires de l' académie royale des sciences de Berlin; an. 1756.

un massimo, ch' è quanto dire, perchè il cervo salga alla massima altezza, converrà che sia

$$\frac{b+c}{c} = 3\left(1 + \frac{1}{2}\frac{Q}{P}\right),$$

e la distanza del centro di grandezza del cervo, alla quale si dovrà attaccare la corda, dovrà essere

$$= \frac{2Pb}{4P+3Q} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(a)}$$

Ciò premesso, supponendo con l'Eulero che il centro d'impulso del vento cada in quello di grandezza del cervo; chiamata b' la distanza del suddetto centro d'impulso da quello di gravità, è manifesto che la b contenuta nell'espressione (a) dovrà essere la stessa e identica b'. Ora b non è $=b'$, ma $=b'+\lambda$ (§ 88); dunque 1°. la $\frac{2Pb}{4P+3Q}$ non potrà esprimere la vera distanza ricercata. 2°. per rinvenire la vera distanza, converrà sostituire nell' espressione (a), $b'+\lambda$; ciò che somministrerà per la distanza suddetta $\frac{2P.\overline{b'+\lambda}}{4P+3Q}$.

91. Per rinvenire il valore di λ, s'osserverà 1°. che l'angolo ϕ, sotto il quale il vento urterà il cervo, quand' esso sarà alla massima altezza, sarà l' angolo che avrà per seno il seno rinvenuto con l' equazione

$$aav\sin^2\phi = 3\left(P + \frac{1}{2}Q\right)\cos\phi.$$

2°. che essendo dati aa, v, P, Q, si potrà facilmente rinvenire il detto angolo ϕ.

Ciò posto, conoscendosi ϕ, $a\,a$, v, vale a dire la lunghezza e larghezza del piano, la velocità e l'angolo sotto il quale si muove, si conoscerà o per gli sperimenti (§ 40), o instituendone de' simili, anche la distanza del centro di grandezza del cervo da quello di resistenza, e perciò anche λ.

92. Nel terzo caso della teoria dell'Eulero, oltre le ipotesi assunte nel secondo, suppone che il cervo abbia una coda B x (fig. 5. tav. III) consistente pure in un altro piano grave e mobile intorno a B. Per l'aggiunta di questa coda non potendosi più considerare il cervo come un solo piano, questo caso dell'autore non entra in quelli contemplati in questa memoria; e perciò l'esame di esso converrà riserbarlo alle susseguenti.

Teoria di Juan.

93. In questa teoria viene da Juan computata anche la coda, considerandola però come un corpo rigido, che sia il prolungamento Bx del diametro AB del cervo volante. Egli suppone inoltre che il cervo volante sia attaccato a due corde Ag, $d\,g$ che si riuniscono nella sola corda gV, onde impedire che il cervo volante possa ruotare intorno ad alcun punto della sua superficie. L'autore si propone d'indagare quale sarà in questo caso l'altezza cui salirà il cervo volante, e la forza di tensione della corda nel punto V.

Supposta quindi

$c\,p = b$;

$g\,e$ una perpendicolare calata da g sopra $a\,b$;

$ce = e$;

$ge = g$;

P il peso del cervo volante compresavi la coda;

v la velocità del vento;

ϕ l' angolo $ge\mathrm{L} = \mathrm{A}iy$;

θ l' angolo ige;

h la lunghezza della corda di densità e grossezza uniforme in tutta la sua lunghezza;

kh il peso totale della corda;

Juan ritrova per la tensione della corda nel punto g,

$$\frac{\mathrm{P}.\sin\phi}{\sin\theta} \text{ ossia } \frac{\mathrm{P}\left[(\mathrm{R}ub+\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

e per quella nel punto V,

$$\left[\left(\frac{\mathrm{P}(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)(\mathrm{R}ub+\mathrm{P}g)-\mathrm{P}^3(b+e)^2}{(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b-e)^2}-kh\right)+\frac{\mathrm{R}^2u^2\mathrm{P}^4(b+e)^4}{\left[(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right]^2}\right]^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots(2)$$

e per l' altezza a cui perverrà il cervo volante al disopra dell' orizzonte

$$+\frac{\mathrm{P}\left[(\mathrm{R}ub+\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{k\left[(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}(b+e)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\left[\left(\frac{\mathrm{P}\left[(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)(\mathrm{R}ub+\mathrm{P}g)-\mathrm{P}^2(b+e)^2\right]}{k\left[(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right]}-h\right)+\frac{\mathrm{R}^2u^2\mathrm{P}^4(b+e)^4}{k^2\left[(\mathrm{R}ue-\mathrm{P}g)^2+\mathrm{P}^2(b+e)^2\right]}\right]^{\frac{1}{2}} \ldots(3)$$

Ciò posto, chiamata, come al § 90, b' la distanza del centro dell' impulsione del vento dal centro di gra-

vità del cervo, ed inoltre e' la distanza $c\,e$ del centro dell' impulsione istessa dalla perpendicolare $g\,e$, supponendosi dall' autore il centro dell' impulso del vento in quello di grandezza del cervo, le b, e contenute nelle equazioni (1), (2), (3) dovranno essere uguali, anzi identiche delle b', e', ma (§ 90) b non è già $= b'$, ma $= b' + \lambda$, ed e non è già $= e'$, ma $= (e' - \lambda)$; dunque l' equazioni dell' autore non esprimeranno la vera tensione della corda, nè la vera altezza del cervo; a meno che, sostituite in esse equazioni in luogo di b, $(b' + \lambda)$ e in luogo di e, $(e' - \lambda)$, le equazioni risultanti non contengano λ, e non rimangano della forma istessa delle (1), (2), (3).

Fatte queste sostituzioni risulta per la tensione nel punto g,

$$\frac{\text{P}\left[(\text{R}\,u\,(b'+\lambda)+\text{P}\,g)^2+\text{P}^2\,(b'+e')^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(\text{R}\,u\,(e'-\lambda)-\text{P}\,g)^2+\text{P}^2\,(b'+e')^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

e per la tensione nel punto v,

$$\left[\left(\frac{\text{P}(\text{R}\,u(e'-\lambda)-\text{P}\,g)(\text{R}\,u\,b+\text{P}\,g)-\text{P}^3(b'+e')^2}{(\text{R}\,u\,(e'-\lambda)-\text{P}\,g)^2+\text{P}^2\,(b'+e')^2}-k\,h\right)^2+\frac{\text{R}^2\,u^2\,\text{P}^4\,(b'+e')^4}{\left[(\text{R}\,u(e'-\lambda)-\text{P}\,g)^2+\text{P}^2(b'+e')^2\right]^2}\right]^{\frac{1}{2}} \text{(b)}$$

e per l' altezza del cervo volante,

$$\frac{\text{P}\left[(\text{R}\,u\,(b'+\lambda)+\text{P}\,g)^2+\text{P}^2(b'+e')^2\right]^{\frac{1}{2}}}{k\left[(\text{R}\,u\,(e'-\lambda)-\text{P}\,g)^2+\text{P}^2\,(b'+e')^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\left[\left(\frac{\text{P}\,(\text{R}\,u\,(e'-\lambda)-\text{P}\,g)\,(\text{R}\,u\,(b'+\lambda)+\text{P}\,g)-\text{P}^2\,(b'+e')^2}{k\left[(\text{R}\,u\,(e'-\lambda)-\text{P}\,g)^2+\text{P}^2\,(b'+e')^2\right]}-h\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\text{R}^2\,u^2\,\text{P}^4\,(b'+e')^4}{k^2\left[(\text{R}\,u\,(e'+\lambda)-\text{P}\,g)^2+\text{P}^2\,(b'+e')^2\right]}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

le quali equazioni paragonate con le (1), (2), (3), si rileverà che queste differiscono essenzialmente da quelle: dal che dovrassi conchiudere 1°. che le equazioni di Juan non potranno porgere i giusti valori nè della tensione della corda, nè dell'altezza del cervo: 2°. che ad ottenere i giusti valori converrà servirsi dell'equazioni (a), (b), (c).

94. Juan per ridurre le sue formole ad un caso facile per la pratica, suppone $e=b, cg=2e$.

Questa ipotesi, come facilmente si può rilevare, fa sparire dalle equazioni (1), (2), (3) le b, e; e perciò queste equazioni somministreranno il vero valore della tensione della corda, e dell'altezza del cervo. Ma se l'ipotesi dell'autore, che il centro d'impulso del vento cada in quello di grandezza del cervo, non può portare inesattezze nei valori delle quantità sopraddette, ne deve portar però di gravissime nella ricerca del valore di $\text{A}g$ il quale renda $e=b, g=2e$.

Secondo l'autore dovrebbe essere

$\text{A}g=\sqrt{4b^2+(c\text{A}-b)^2}$, (fig. 5, tav III). Ora (pel § 92)

il giusto valore di $\text{A}g$ sarà

$$\sqrt{4(b'+\lambda)^2+[(c\text{A}-\lambda)-(b'+\lambda)]^2}.$$

95. Per rinvenire λ, riflettiamo che secondo Juan, si ha per la ipotesi di $b=e, g=2e$

$\sin\phi=\dfrac{2\text{P}}{[(2u-2\text{P})^2+4\text{P}^2]^{\frac{1}{2}}}$; ora conoscendosi P, R, u,

si troverà $\sin\phi$, e quindi (§ 91) anche $\lambda \sin\phi$.

ART. III.

Moto de' piani rettangolari cadenti per l' aria.

96. Un corpo sottile, piano, e rettangolare, e poco pesante, il cui centro di gravità giaccia nel centro di grandezza, lasciato cadere per l' aria tranquilla col lato minore parallelo, e col maggiore inclinato all' orizzonte, discende oscillando intorno ad un asse parallelo ai lati minori, e descrivendo una curva serpeggiante.

Un piano *ml* (fig. 2, tav. III) di 15 pollici di lunghezza, e 10 di larghezza ed $1\frac{1}{4}$ d' oncia di peso, cadendo dall' altezza *cz* di 7 piedi, sotto un angolo *lcz* di 35° oscillò tre volte, e percorse la curva $c\,c'\,c''\,c'''$ a tre punti e', e'', e''' di flesso contrario.

97. Secondo tutte le teorie ricevute fin ora su la misura della resistenza dell' aria, il piano dovrebbe discendere senza oscillare, vale a dire sempre parallelo a se stesso, e descrivere una curva, per esempio $c\,c'\,c''\,c'''$ (fig. 3) senza punti di flesso.

Perchè il piano cadendo per l' aria potesse oscillare o ruotare intorno a qualche asse, converrebbe, siccome è dimostrato dalla meccanica, che il centro della resistenza dell' aria cadesse fuori del centro di gravità del piano. Il che per le suddette teorie non può avverarsi. Dalle cose dette nella seconda parte si raccoglie che secondo tutte le formole adottate, il centro di resistenza del piano per l' aria deve trovarsi e rimanere costantemente nel centro di grandezza, ch' è quanto dire, dove, per ipotesi, si suppone raccolta l' a-

zione del peso, o sia della forza motrice e acceleratrice del piano.

Per ciò che spetta alla curva, suppongasi (fig. 3) ml il piano che discenda dalla quiete; cg lo spazio che percorrerebbe nel primo istante, se potesse obbedire alla sola gravità. Si decomponga cg nelle cq, cp, l' una normale, l' altra parallela al piano, e $cv = qr$ rappresenti la resistenza che incontrerà il piano nel primo istante. E' manifesto che il centro c percorrerà la diagonale cc'.

Nel principio del secondo istante il piano sarà animato dalla velocità $c'o$ uguale a cc' e giacente nella prolungazione di essa, e dalla velocità $c'g'$ uguale a cg, per le quali velocità esso piano dovrebbe percorrere la diagonale risultante da $c'o, c'g'$; che è quanto dire una linea maggiore di $c'o$, e formante un angolo col piano $m'l'$ maggiore dell' angolo $c'cl$.

Sia da o condotta la or' parallela ad $m'l'$; essendo $m'l'$ parallela ad ml, e cc' uguale alla $c'o$; sarà $c'r'$ uguale alla cr, e perciò anche $q'r'$ uguale alla qr.

Essendo la diagonale di $c'o, c'g'$ maggiore di cc', e formando un angolo colla $m'l'$ maggiore dell' angolo $c'cl$, la resistenza che incontrerà nel secondo istante, sarà maggiore della resistenza incontrata nel primo, cioè maggiore di qr. Quindi la porzione della gravità agente per la $c'q'$ sarà minore di $c'r'$. Suppongasi dunque ch' essa sia $c's$; nel secondo istante il centro c' percorrerà la diagonale $c'c''$ risultante dai due lati $c't; c'o$, vale a dire una linea che si accosterà alla $c'l'$ più di quello che si accosta la $c'c$.

Supposta $c'' o'$ uguale alla $c' c''$ e giacente nella sua prolungazione; $c'' g''$ uguale e parallela alla $c' g'$, o sia $c g$, è manifesto che nel terzo istante, se il fluido non resistesse, il piano percorrerebbe la diagonale risultante dalle $c'' o'$, $c'' g''$, vale a dire una linea maggiore della $c' c''$ e formante col piano un angolo maggiore di $l' c' c''$; d'onde risulta che nel terzo istante il piano incontrerà maggior resistenza che nel secondo, cioè maggiore di $q' s$. Ciò premesso, riflettasi che condotta $e k$ parallela ad $l'' m''$, essendo $l'' m''$ parallela ad $l' m'$; $c'' e$ una prolungazione di $c' c''$; $c'' q''$, $c'' p''$ uguali e parallele alle $c' q'$, $c' p'$; la $e p''$ sarà uguale ad $f p'$; quindi anche $g'' e = g' f$. Ma la resistenza $q'' s'$ in c'' è maggiore della resistenza $q' s$ in c'; dunque $q'' s'$ sarà maggiore di $g'' e$: dunque nel terzo istante il piano percorrerà la diagonale risultante da $c'' t'$, $c'' o'$, cioè una linea che si accosterà alla $l'' c''$ più della linea $c' c''$ percorsa nel secondo istante.

Per le stesse ragioni dovendo ciò avverarsi anche dello spazietto percorso nel quarto istante e in ciascun de' susseguenti, si vedrà chiaramente che secondo le formole il piano $m n$ dovrebbe descrivere una curva, per esempio $c c' c'' c'''$ che volti il suo convesso alla verticale $c g$.

98. Passiamo ora a indagare se il descritto fenomeno si possa spiegare col mezzo delle verità dimostrate dai nostri sperimenti.

Da questi risulta 1°. che il centro di resistenza del piano $m l$ (fig. 2) dovrà cadere tra l, c, per esempio in o; perciò il piano dovrà concepire due movimenti, uno di rotazione intorno al centro di gravità c, per cui salirà

colla estremità l, e discenderà coll' estremità opposta m; l' altro di progressione comune a ciascun punto del piano. Pel moto di rotazione s' ingrandirà l' angolo d' urto, di modo che dove prima era $l\,c\,z$, per la rotazione diventerà $l'\,c'\,z'$. Quindi il centro di resistenza si accosterà (§ 41) al centro di grandezza c'. Inoltre pel moto di rotazione della metà posteriore $c'\,m'$ cospirante col moto progressivo, si dovrà aumentare la velocità di urto della $c'\,m'$, e per la ragione opposta diminuirsi la velocità d' urto della $c'\,l'$. Laonde anche per questa ragione il centro di resistenza dovrà accostarsi al centro c di grandezza, ed oltrepassarlo passando nella metà posteriore $c'\,m'$ per esempio in o'. Sia $l'\,m'$ la posizione che prenderà il piano quando il centro di resistenza si troverà in o'; ogn' un vede che per le ragioni dette di sopra il piano dovrà passare dalla posizione $l'\,m'$, alla $l''\,m''$, e da questa alla $l'''\,m'''$, oscillando continuamente intorno a c.

Egli è poi facile a rilevare che a cagione di queste oscillazioni il piano o sia il centro c (fig. 2) della sua gravità dovrà discendere per una curva serpeggiante.

1°. per tutto il tempo che il piano passerà dalla posizione declive $l\,m$ alla orizzontale $\lambda\,\mu$ tanto la direzione $c\,v$ (fig. 3) per cui agirà la resistenza dell'aria quanto la direzione $c\,p$ per cui agirà la porzione $c\,p$ della gravità $c\,g$ (§ 97) si troveranno a sinistra della verticale $c\,g$, e perciò le suddette forze allontaneranno il piano dalla linea $c\,z$ (fig. 2).

2°. Nel tempo in cui il piano passerà dalla posizione orizzontale $\lambda\,\mu$ alla acclive $l'\,m'$, e dalla $l'\,m'$

alla orizzontale $\lambda' \mu'$ le direzioni per le quali agiranno le forze $c v$, $c p$ si troveranno a destra della verticale $c z'$, e per conseguenza in tutto quel tempo il piano dovrà accostarsi alla linea $c z$.

3°. Mentre il piano della $\lambda' \mu'$ passerà alla posizione declive $m'' l''$ le forze stesse agiranno a sinistra della verticale $c' z''$, e la allontaneranno di nuovo dalla $c z$.

Donde apparisce che il piano dovendo ora accostarsi, ed ora discostarsi dalla $c z$ sarà costretto a descrivere una curva, per esempio $c c' c'' c'''$ a più punti di flesso.

99. Un' altra ricerca nella quale, l' uso delle note teorie sulla resistenza de' fluidi porterebbe a risultati contrarj a ciò che rilevasi dall' osservazione, e dallo sperimento, sarebbe quella delle leggi del moto di un piano che discenda come $m l$ (fig. 2) inclinato nella estremità l alla verticale $c z$, e che abbia il centro di gravità non già nel centro c di grandezza, ma in un punto, per esempio o tra c, e la estremità anteriore l.

Secondo le suddette teorie il centro di resistenza del piano dovendo cadere nel centro di grandezza c, è manifesto che il piano dovrà oscillare intorno ad o descrivendo colle sue estremità m, l gli archi $m\text{M}$, $l\text{L}$, quando per l' opposto discende senza oscillare, o oscillando una o due volte, ma per gli archi $m\text{M}'$, $l\text{L}'$ diametralmente opposti ai primi.

Un piano rettangolare di 15 pollici di lunghezza, e 10 di larghezza, e del peso di $1\frac{1}{4}$ d' oncia lasciato cadere dall' altezza di 7 piedi sotto un angolo di 25°

quando il centro di gravità era distante da c di $\frac{1}{3}$ incirca di tutta la lunghezza $l\,m$, il piano discendeva da quell' altezza senza oscillare, e cadeva inclinato all' incirca come lo era nel momento della caduta. Quando il centro di gravità o trovavasi distante da c di $\frac{1}{6}$ di $l\,m$ il piano discendeva da tutta quell' altezza muovendosi bensì intorno ad o ma senza compiere un' intiera oscillazione, vale a dire senza passare dalla posizione $l\,m$ alla $l'\,m'$, e cadeva sotto un'angolo più grande dell' angolo $\text{L}\,c\,\text{Z}$. Quando il centro di gravità si trovava a picciolissima distanza da c, o pure anche nell' istesso centro c di grandezza, il piano faceva due, ed anche tre oscillazioni.

100. La rigorosa spiegazione di tutti questi fenomeni si ottiene con facilità dagli sperimenti del § 40.

Il centro di resistenza del piano $m\,l$ inclinato alla verticale $c\,z$ d' un angolo di 25° deve cadere pei suddetti sperimenti non già nel centro di grandezza c, ma in un punto distante da c in circa di una terza parte di tutta la lunghezza del piano. Quindi tra il centro di gravità o posto alla distanza di $\frac{1}{6}$ di $l\,m$, e l'estremità l, per esempio in o'; perciò il piano (§ 98) dovrà, come si osserva, oscillare intorno ad o per gli archi $l\,\text{L}'$, $m\,\text{M}'$ diametralmente opposti a quelli ne' quali dovrebbe oscillare secondo le adottate teorie.

Avanzandosi il centro di gravità o verso l' estremità anteriore l s'accosta al centro di resistenza, così che quand'esso si trovasse distante da c di una terza parte di tutta la $l\,m$ i due centri suddetti caderebbero in un istesso punto (§ 40), per conseguenza il piano dovrà discendere senza oscillare.

Quanto maggiore sarà la distanza $o\,o'$ del centro di resistenza da quello di gravità il piano avrà più facilità ad oscillare, quindi dovrà fare più oscillazioni quando il centro di gravità sarà in c, o vicinissimo ad esso, che quando sarà più lontano.

101. Al fin qui detto intorno al moto de' piani, reputo di qualche importanza l' aggiungere alcune osservazioni sul tempo della loro caduta, e sulla distanza a cui cadono dalla verticale $c\,z$.

Osservaz. 1ª. Negli sperimenti del § 99 quando il centro di gravità del piano si trovava distante dal centro c di grandezza di $\frac{1}{6}$ di $m\,l$ discendeva 3″ in circa più tardi, ed a 13 piedi più lontano dalla verticale $c\,z$, che quando il centro suddetto era distante di $\frac{1}{3}$ di $m\,l$.

Osservaz. 2ª. Di due piani rettangolari della grandezza e del peso del piano che servì agli sperimenti del § 99, lasciati cadere, l' uno inclinato alla verticale coi lati maggiori, l' altro coi minori, dall' altezza di 7 piedi, sotto lo stesso angolo $l\,c\,z$ di 25°, e col loro centro di gravità lontano dal centro di grandezza di $\frac{1}{6}$ del lato col quale il piano trovavasi inclinato alla verticale, quello che discese inclinato col lato minore si fece orizzontale più presto dell' altro e cadde 2″ incirca più tardi, e tre piedi più lontano dalla verticale $c\,z$.

Osservaz. 3ª. Quando il centro di gravità del piano che si lasciava cadere inclinato col lato maggiore rimaneva alla distanza del centro di grandezza di $\frac{1}{6}$ di $l\,m$ e si aumentava di $\frac{2}{3}$ di pollice la distanza del centro di gravità dell' altro piano, tutti due i piani si rendevano orizzontali, e cadevano nello stesso tempo ed alla stessa distanza dalla $c\,z$.

102. A render ragione del 1°. di tali fenomeni osserveremo che, quando il centro di gravità del piano si trova ad $\frac{1}{6}$ di *m l* lontano da *c*, l'angolo *l c z* deve (§ 100) ingrandirsi e rimanere lo stesso quando il centro suddetto si trova ad $\frac{1}{3}$ di *m l*. Quindi il piano nel primo caso dovrà incontrare maggior resistenza, e perciò discendere più tardi. Egli è poi manifesto che per l'ingrandimento dell'angolo *l c z*, e della resistenza incontrata da *l m*, il piano dovrà cadere a maggiore distanza da *c z*.

Quanto al 2°. fenomeno si rifletterà che, quando il centro di gravità si trova distante dal centro di grandezza di $\frac{1}{6}$ del lato col quale discende inclinato, la distanza assoluta tra il centro di resistenza, e quello di gravità sarà minore nel piano che discende inclinato col lato minore, e perciò il piano stesso dovrà rendersi orizzontale più presto. Sia M L (fig. 6) il piano che discenda inclinato col lato maggiore; ed *m l* quello che discende inclinato col lato minore; G, *g* sieno i centri di gravità, e perciò C G $= \frac{1}{6}$ M L, e *c g* $= \frac{1}{6}$ di *m l*; R, *r* i centri di resistenza; G Q, *g q* le porzioni del peso che agiscono normalmente al piano (§ 97); R V, *r v* le resistenze; è manifesto che, dovendo il piano obbedire a un tempo stesso alle forze G Q, R V; *g q*, *r v*, dopo il primo istante i punti G, *g* si troveranno in Q, *q* ed i punti R, *r* in V, *v*, e che dopo il primo istante i piani si troveranno nelle posizioni L' M', *l' m'*; ma G R maggiore di *g r*, e, per ipotesi, uguali gli angoli L C Z, *l c z*, e le superficie dei due piani e i loro pesi, ossia G Q $=$ *g q*, R V $=$ *r v*, dunque l'angolo *m o m'* maggiore dell'angolo M O M', che è quanto dire, che il piano *m l* si

renderà orizzotale più presto del piano ML; e quindi, come si è disopra dimostrato, dovrà discendere più tardi, e più lontano da *c z* (fig. 2).

Finalmente dagli sperimenti del § 40 si raccoglierà che, discostando il centro di gravità del piano che discende inclinato col lato minore di $\frac{1}{3}$ di pollice dal centro di grandezza, i due centri di gravità, e di resistenza, se non si confondono insieme, rimangono però a picciolissima distanza l'un dall'altro, quindi (§ 100) il piano dovrà cadere senza oscillare e perciò nel tempo istesso in cui cade il piano che discende inclinato col lato maggiore ed all'istessa distanza da *c z*.

103. Se per un qualche artificio qualunque siasi, il centro *o* di gravità del piano *l m* (fig. 7) in luogo di essere nella superficie urtante cadesse fuori di essa in un punto per esempio in *o'* della normale *o o'*; alzata da *o'* la verticale *o' c*, l'azione del peso, o gravità *o'* si potrà supporre in *c'*. Ora, trovandosi questo punto più vicino di *o* al centro *c* di grandezza, ne seguirà, pel § 101, che, quando il centro di gravità cadesse sotto la superficie resistente del piano, esso dovrebbe in parità di circostanze cadere più presto, e meno lontano dalla verticale *c z*; come rilevasi da ripetuti sperimenti.

104. Le osservazioni fatte ai paragrafi 101, 103 servono mirabilmente, come vedremo nelle successive memorie, a render ragione di non pochi curiosi fenomeni, o non spiegati, o malamente spiegati fin ora, e dei *ricochets* e del movimento degli uccelli accennato nella introduzione.

Appendice al §. 82.

Sopra un nuovo metodo per ritrovare la velocità de' bastimenti mossi dall' azione de' remi.

Dal § 82 risulta che, considerando il centro di resistenza delle pale de' remi nel punto indicato dai nostri sperimenti, non in quello che porgono le formole, di cui si fece uso fin' ora, si deve ottenere la velocità della nave più prossima alla vera. Essendomi riuscito di rinvenire un' espressione di questa velocità anche più esatta in grazia d' un nuovo metodo che ho tenuto nell' investigarla un pò diverso da quello dell' Eulero *(a)*, mi fo coraggio ad esporre questo metodo come appendice al § 82.

Sia ab (fig. 8) il remo, ed $=c$,

f la forcola o l' ipomoclio, ed $af=b$,

b il vero centro di resistenza della pala del remo, ed

$fb=a$.

Le braccia del remigante spingano il remo in a per la aa' normale ad ab con forza $=p$, la pala si muoverà nella direzione bb', e incontrerà resistenza; donde si comprenderà facilmente che, potendosi a cagione di questa resistenza considerare il remo ab come un vette con l' ipomoclio in b, il punto f del ba-

(a) *Scientia navalis. cap. de actione remorum.*

stimento sarà spinto nella direzione fk normale ad af da forza $p\,\frac{(af+bf)}{bf}$; e il punto a del bastimento stesso, ove posano i piedi del remigante, sarà da' piedi stessi spinto nella direzione aa'' da forza uguale a quella delle braccia, ossia da p.

Ma un corpo spinto in due punti, e in direzioni che non passino pel centro di gravità incomincia a muoversi intorno a quel punto che chiamasi *centro spontaneo di rotazione*; quindi anche il bastimento incomincierà a muoversi intorno ad un punto, che dovrà essere nella linea af tra a ed f, poichè i punti a, f devono muoversi nelle direzioni trà loro opposte aa'' fk, e normali ad af. Supposto un tal punto in o è manifesto che si potrà supporre il bastimento come un pendolo oscillante intorno ad o, e se da o pel centro di gravità G si menerà la indefinita oGX, il centro di oscillazione sarà in un punto della oX, per esempio in Q dove, per la nota proprietà di questo punto, supposto applicato un ostacolo nella direzione opposta al moto di Q, il bastimento si fermerebbè, e dove all' opposto applicata una forza Q agente nella direzione del moto di Q, si comunicherebbe al bastimento il moto eccitatovi dal remo. Suppongasi la direzione della forza Q espressa da Qq perpendicolare alla oX. Si prolunghi la Qq sino alla linea ab, che vada ad incontrarla per esempio in p; e la Qp si prolunghi ancora oltre la ab di maniera che sia $ph = \mathrm{Q}q = \mathrm{Q}$. La forza Q espressa dalla ph si scompone nelle forze pl normale al remo, e sarà $= \frac{\mathrm{Q}\cdot\mathrm{Q}o}{po}$, e pn parallela al remo stes-

so, e sarà $= \frac{Q \cdot pQ}{po}$, per la similitudine de' triangoli plh, pQo. Ora la porzione $\frac{Q \cdot Qo}{po}$ della forza Q applicata in p sarà quella che ecciterebbe nel remo il moto intorno ad f comunicatogli dalla forza p applicata in a. Quindi sarà

$$\frac{Q \cdot Qo}{po} \cdot pf = p \cdot af,$$

e perciò il fulcro f premuto nella direzione fk' da una forza uguale a

$$p + \frac{Q \cdot Qo}{po};$$

che dovrà essere uguale alla forza

$$p\left(\frac{af + fb}{fb}\right),$$

quindi avremo

$$\frac{Q \cdot Qo}{po} + p = p\left(\frac{af + fb}{fb}\right)$$

ossia $\frac{Q \cdot Qo}{po} \cdot fb + p \cdot fb = p \cdot af + p \cdot fb$;

ossia $\frac{Q \cdot Qo}{po} = p \cdot \frac{af}{fb}$. Ma abbiamo ancora

$\frac{Q \cdot Qo}{pf} = p\,\frac{af}{pf}$, perciò $\frac{p \cdot af}{pf} = \frac{p \cdot af}{fb}$, ossia

$pf = fb$, quindi si vede che p cadrà in b, perciò po

$= b\,o$, quindi $\frac{Q\,.\,Q\,O}{b\,o} = p\,.\,\frac{a\,f}{b\,f} = \frac{p.b}{a}$, o veramente, calata dal centro di gravità G la G H normale ad $a\,f$, sarà, per la similitudine de' triangoli G H o, Q p o, $\frac{Q\,.\,Q\,O}{b\,o} = \frac{Q\,.\,H\,O}{G\,O}$, e $Q = \frac{p.b}{a}\,.\,\frac{G\,O}{H\,O}$, espressione della forza che muove il bastimento agendo in Q′ nella direzione b Q′, e l' istessa di quella ritrovata con altro metodo dal celebre Eulero.

Adunque l' azione del remo nella forcola, e quella de' piedi del remigante sul bastimento si riducono alla sola forza $\frac{p\,.\,b}{a}\,.\,\frac{G\,O}{H\,O}$ applicata in Q′ nella direzione b Q′. Per questa forza il bastimento piglierebbe due moti, uno di rotazione intorno all' asse che passerebbe pel centro di gravità, l' altro di progressione per cui il centro di gravità progredirebbe nella retta G Z, parallela alla b Q′.

Scompongasi questa forza $\frac{p\,.\,b}{a}\,.\,\frac{G\,O}{H\,O}$ nelle due, una parallela al remo, e sarà $= \frac{p\,.\,b}{a}\,.\,\frac{G\,H}{H\,O}$, l' altra perpendicolare al remo, e sarà $= \frac{p\,.\,b}{a}$. Sia $m:n$ la ragione del seno al coseno dell' angolo che forma il remo $a\,b$ colla spina M N. La forza $\frac{p.b}{a}$ si scomporrà ancora in

due, una parallela alla spina, e sarà $\frac{mp.b}{a}$, l' altra normale, e sarà $\frac{np.b}{a}$. Parimente la forza parallela al remo ed $= \frac{p.b}{a} \cdot \frac{\text{GH}}{\text{HO}}$ si scomporrà in una parallela alla spina, e sarà $\frac{np.b}{a} \cdot \frac{\text{GH}}{\text{HO}}$, ed in un' altra perpendicolare alla spina, e sarà $= \frac{mp.b}{a} \cdot \frac{\text{GH}}{\text{HO}}$, ma avvertiamo che la forza parallela al remo non agisce nel bastimento, potendo scorrere il bastimento istesso liberamente lungo il remo. Resteranno adunque le sole due forze $\frac{mp.b}{a}$, $\frac{np.b}{a}$.

Ma se nel bordo opposto del bastimento vi fosse un' altro remo uguale, e nella posizione medesima del remo ab, anche dall' azione di quello nascerebbero le due forze $\frac{mp.b}{a}$, $\frac{np.b}{a}$, ma le perpendicolari alla spina si opporranno direttamente, resteranno adunque le due $\frac{mp.b}{a}$, $\frac{mp.b}{a}$ cospiranti verso la medesima plaga lungo la spina. Quindi l' espressione della forza accelleratrice del bastimento sarà $2\frac{mp.b}{a}$. E supposto retto l' angolo che forma il remo colla spina,

ψ il numero de' remiganti che agiscono in una volta sopra uno de' bordi, sarà la forza motrice $= 2\,\psi\,\frac{p.b}{a}$.

Ma pel moto uniforme dovrà essere $2\,\psi\,\frac{p.b}{a} =$ alla resistenza della prora che è $=\frac{M}{V}\,ff\,v$, supposta v l'altezza dovuta alla velocità progressiva del bastimento, perciò sarà $2\,\psi\,\frac{p.b}{a} = \frac{M}{V}\,ff\,v$; ma $p = p\,(1 - \frac{u'}{9})$, supposta u' l'altezza dovuta alla velocità delle braccia de' remiganti (*Eulero opera citata*), perciò $2\,\psi\,p\,(1 - \frac{u'}{9})\,\frac{b}{a} = \frac{M}{V}\,ff\,v$. Ora non ci resta che a ritrovare u'.

Ne' metodi di ritrovare u' consiste la differenza de' risultati tra la mia, e la formola dell' Eulero esprimente le leggi del moto del bastimento. Ecco come io ritrovo u'.

E' certo che il remo $a\,b$ muovendosi in f nella direzione $f\,k$, ed in b nella direzione $b\,b'$, normali ambedue alla $f\,b$ incontrerà colla pala una resistenza che sarà $= \frac{M}{V}\,g\,h\,.\,u$, supposta $g\,h$ l'area della pala, u l'altezza dovuta alla sua velocità, ed il punto f incontrerà una resistenza $= \frac{M}{V}\,\frac{ff\,v}{2\,\psi}$. Potremo adunque sup-

porre il remo $a\,b$ come una verga rigida posta sopra un piano levigatissimo, e gravata in f, e b da' pesi, o masse $\frac{M}{V}\,\frac{ffv}{2\,\psi}$, $\frac{M}{V}\,g\,h\,.\,u$ e urtata in a da una potenza.

Questa potenza, non agendo tra f, e b in sito che lasci da ambe le parti forze d' inerzia uguali, farà muovere la verga intorno a quel punto che sarà trà f, e b, per esempio in o', e che da' dinamici è parimente chiamato *centro spontaneo di rotazione*; sarà perciò la distanza $a\,o' = \frac{a\,b^2\,.\,B + a\,f^2\,.\,F}{a\,b\,.\,B + a\,f\,.\,F}$, supposte B, F le masse, o pesi de' corpi, che per noi sono $\frac{M}{V}\,g\,h\,u$, $\frac{M}{V}\,\frac{ff\,v}{2\,\psi}$, quindi supposto $f\,o' = x$ sarà

$$a\,o' = b + x = \frac{c^2\,.\,\frac{M}{V}\,g\,h\,.\,u + b^2\,.\,\frac{M}{V}\,\frac{ff\,v}{2\,\psi}}{c\,.\,\frac{M}{V}\,g\,h\,.\,u + b\,.\,\frac{M}{V}\,\frac{ff\,v}{2\,\psi}}$$

ma $x : \sqrt{v} = a - x : \sqrt{u}$, quindi $u = \left(\frac{a-x}{x}\right)^2 v$;

perciò sostituendo, e riducendo si avrà

$$x = \frac{a}{1 + \sqrt[3]{\frac{ff\,b}{2\,\psi\,.\,g\,h\,.\,c}}}.$$

Ora riflettiamo che fatto $g\,h = \infty$, diventa $x = a$, e fatto $ff = \infty$, diventa $x = o$, come è di dovere.

Per ritrovare u' considero che la velocità attiva delle braccia de' remiganti è uguale alla velocità rotatoria di a intorno ad o', meno la velocità progressiva del

Bastimento $= \sqrt{v}$, quindi $\sqrt{u'} = \left(\frac{b+x}{x}\right)\sqrt{v} - \sqrt{v}$

$= \frac{b}{x}\sqrt{v}$, ed $u' = \frac{b^2}{x^2} \cdot v = \frac{b^2}{a^2}\left(1 + \sqrt[3]{\frac{ffb}{1\psi gh.c}}\right)^2 v$;

perciò sostituendo nell' equazione $2\psi p\left(1 - \frac{u'}{\vartheta}\right)\frac{b}{a} = \frac{M}{V} ffv$

il valore di u', e riducendo si avrà

$$v = \frac{2\psi p \cdot \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3}\ \frac{M}{V} ff + \frac{2\psi}{\vartheta} p\left(2 + \sqrt[3]{\frac{ffb}{2\psi c.gh}}\right)^2}$$

e supposti ad $\frac{M}{V}$, p, ϑ i valori adottati dall' Eulero,

si avrà $v = \dfrac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3} ff + \psi\left(1 + \sqrt[3]{\frac{bff}{2\psi gh.c}}\right)^2}$,

formola che differisce da quella dell' Eulero.

Supposto $gh = \infty$, si avrà $v = \dfrac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3} \cdot ff + \psi}$

stessa della formola del chiaro autore come deve esse-

re, poichè in questo caso il punto o' caderebbe in b, e pel metodo dell'Eulero, e pel nostro.

Dal fin qui detto risulta, che secondo i nostri principj la formola regolatrice del moto d'un bastimento a remi sarebbe

$$v = \frac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3} ff\psi + \left(1 + \sqrt[3]{\frac{b\,ff}{2\psi g h c}}\right)^2},$$

quando per i principj dell' Eulero dovrebb' essere

$$v = \frac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{ff\left[\frac{a^3}{b^3} + \left(\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{ff}{\psi}}\right)^2\right]}$$

A conoscere quale delle due formole sia la più esatta sceglieremo l' esempio stesso dell' Eulero d' una galera che percorreva in un secondo $7\frac{1}{5}$ pied. ren.

Supposto col mentovato autore che per l' addotto esempio sia

$$\frac{\psi}{ff} = 2,56$$

$$\psi = 3\frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2};$$

lo spazio percorso dalla galera in un secondo dovrebbe essere per la nostra formola

di $6\ \frac{5410}{6000}$ pied. ren.

e per quella dell' Eulero

di $6\ \frac{7}{12}$ pied. ren.

Laonde l' espressione della velocità del bastimento a remi ritrovata col nostro metodo può tenersi più esatta di quella che somministra il metodo dell' Eulero.

La formola $v = \dfrac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3} \frac{ff}{\psi} + \left(1 + \sqrt[3]{\frac{ff\, b}{2 \psi g h . c}}\right)^2}$

è veramente un pò troppo complicata per ritrovare la miglior proporzione delle parti esterna, e interna del remo, che dia la massima velocità.

Il mezzo più spedito, e meno laborioso è quello di suppore ad a, oppure a b sotto un costante valore di ff, gh, ψ, varj valori, e vedere per quale di questi si ottenga la massima v.

Supposti adunque

$ff = \frac{640}{729}$, $\psi = 303$, $gh = 1$ pied. quad.

ed $a : b = 8 : 1$ Sarà $v = 25,21$

$a : b = 9 : 1$ $v = 25,28$

$a : b = 93 : 10$ $v = 25,0$

Il che ci dimostra che per far correre colla massima velocità un bastimento per cui si avesse

$$\psi = 303 \,,\; ff = \frac{643}{729} \,,\; g\,h = 1$$

converrebbe che la proporzione delle parti esterna, ed interna de' remi fosse di 9 : 1 .

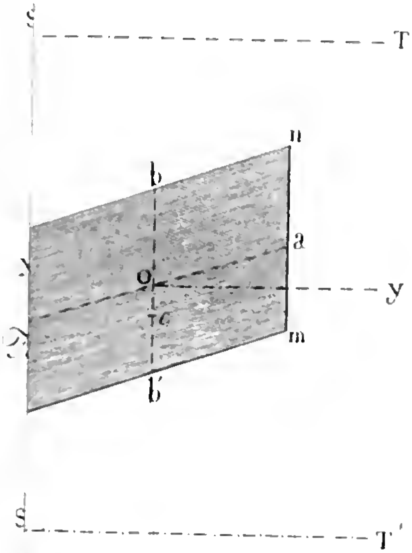
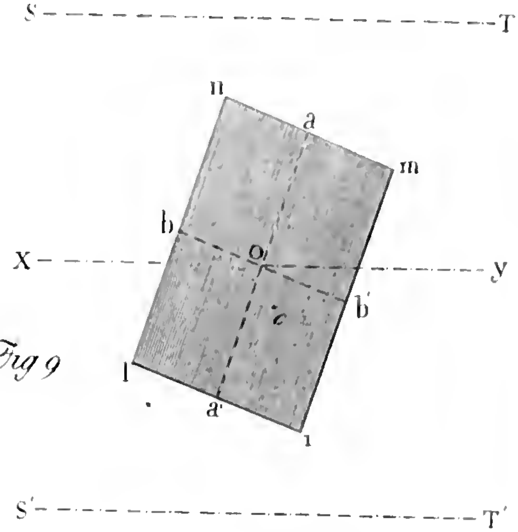
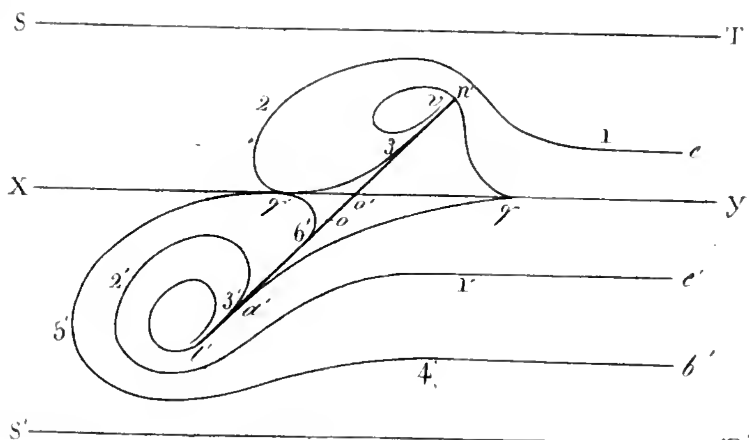
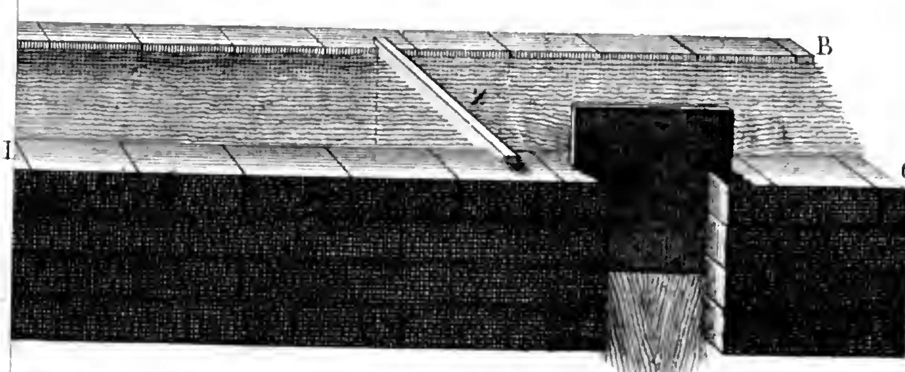

S
T
n
b
a
o
y
c
m
b'
S
T'

Fig 9


S
T
n
a
m
b
X
o
y
b'
c
l
a'
S'
T'

Fig


S
T
2
n'
1
e
3
X
Y
6'
o
2'
e'
1'
3'
5'
b'
4
S'
T'


B
t
L
C

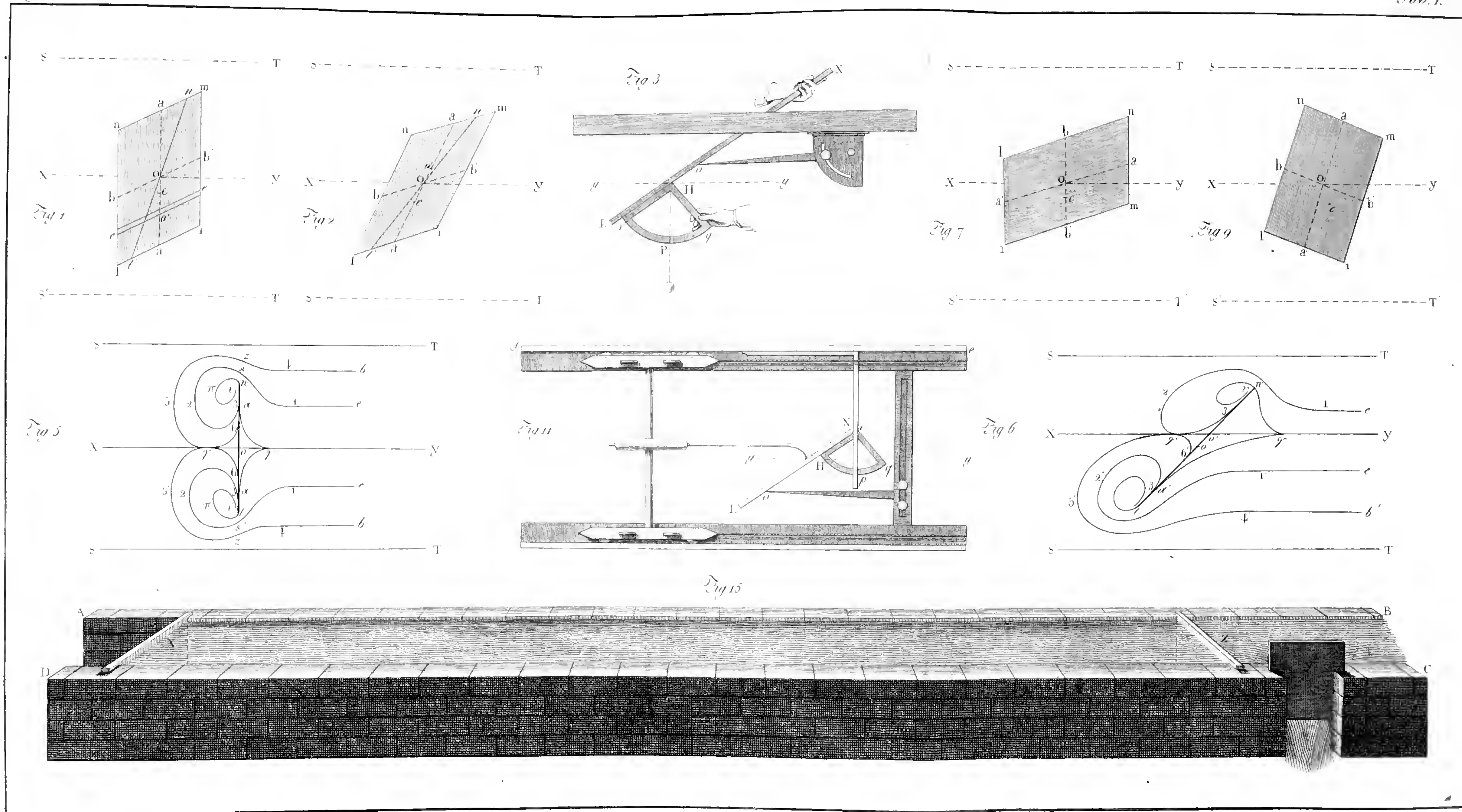


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 7
Fig 9
Fig 5
Fig 11
Fig 6
Fig 15

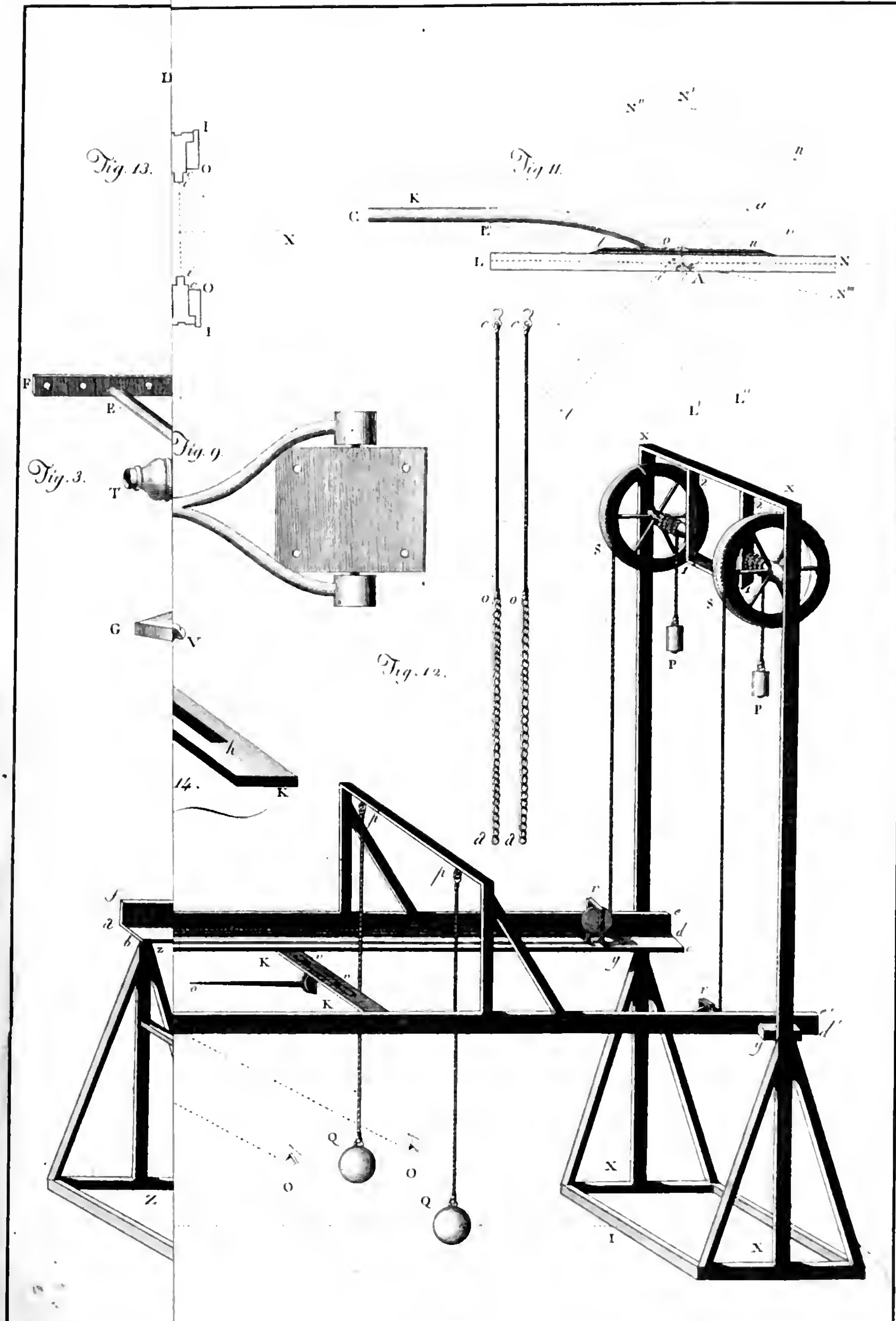


Fig. 13.
Fig. 11.
Fig. 9.
Fig. 3.
Fig. 12.
14.

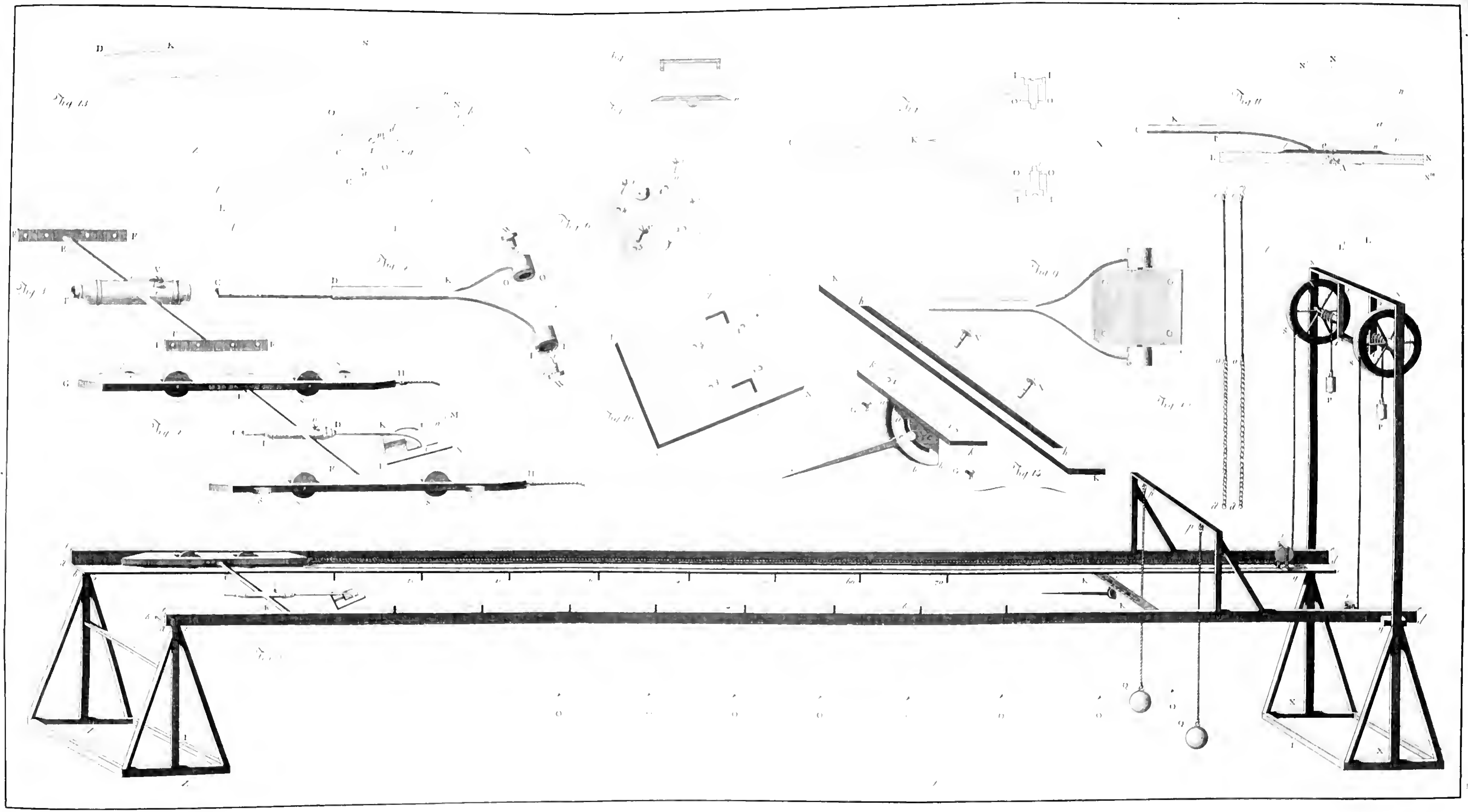


Fig. 4

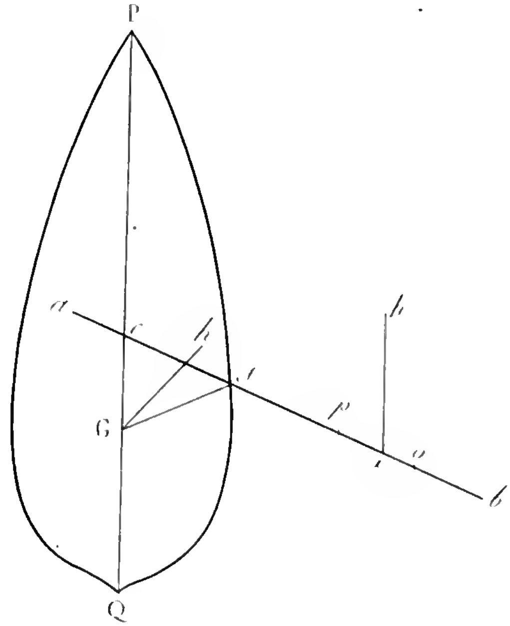


Fig. 7

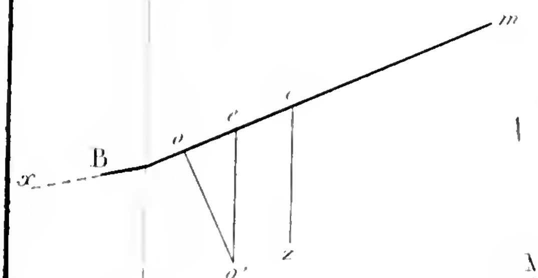
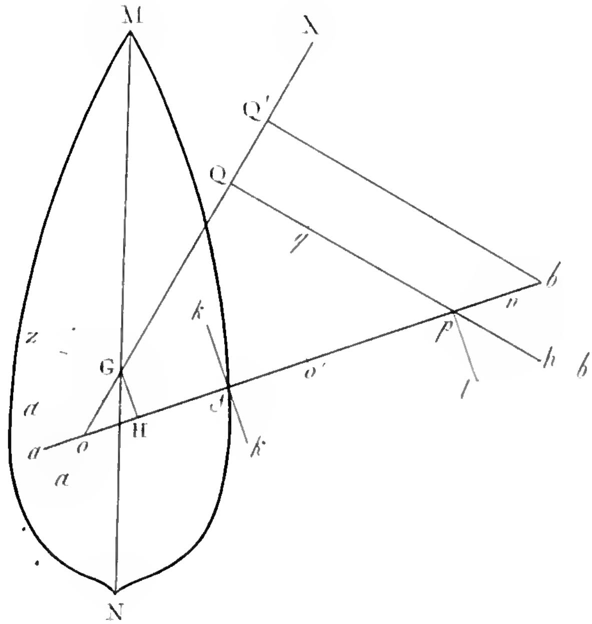
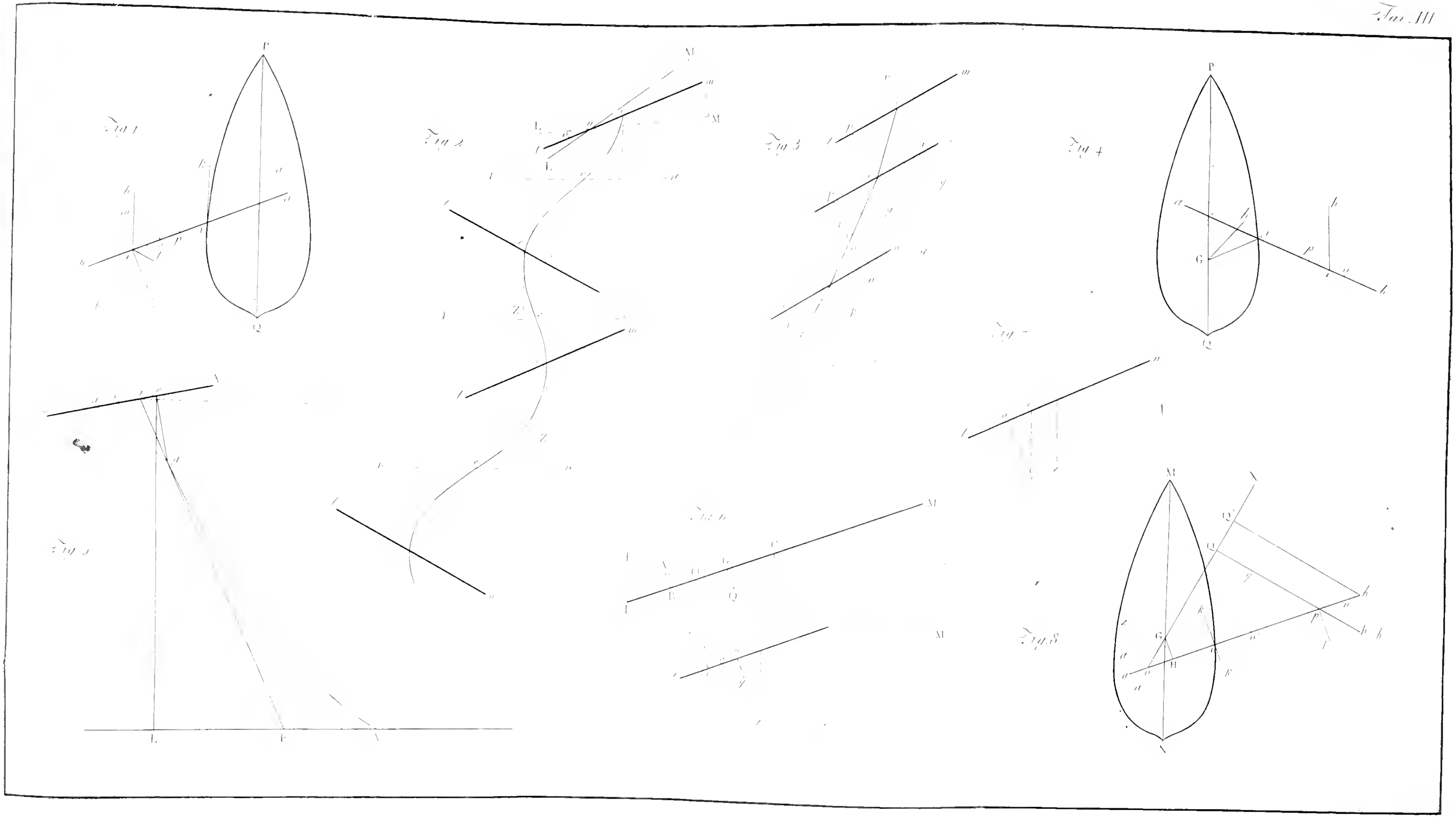


Fig. 8



Tab. III



SULLE LIVELLAZIONI BAROMETRICHE

Di Francesco Venini

Ricevuta ai 7 Luglio 1804.

PARTE I.

METODO DIRETTO PER MISURAR COL BAROMETRO LE ALTEZZE DEI LUOGHI.

Sezione I.

Principj ai quali è appoggiato il metodo diretto.

1. L'aria, come tutti gli altri corpi e solidi e fluidi, or è dilatata ed or condensata da quella causa occulta che produce in noi le sensazioni di caldo e di freddo. Essa in oltre è grave; è sensibilmente compressibile anche da forze mediocri esternamente applicate, e dalla combinazione di queste due proprietà ne segue necessariamente, che le parti superiori dell' aria premendo col lor peso le inferiori, queste ne sono tanto più condensate quanto maggiore è l' altezza dell' aria superiore, e minore la forza del calore che le dilata. Dopo le celebri sperienze del Torricelli e del Pascal è fuor d' ogni dubbio, che l' acqua nelle

trombe ed il mercurio nei barometri son sostenuti dalla pression dell'aria ad altezze che seguono la ragion diretta di questa pressione e l'inversa dei pesi specifici dell' acqua e del mercurio. A questi fondamenti è appoggiato il metodo di livellare o misurar col barometro le altezze dei luoghi: essendo manifesto che se un barometro si trasporterà ad una sensibile altezza, tutta l' aria che l' uom si lascia addietro non potrà più premere il mercurio, il quale per questa diminuzion di pressione sarà sostenuto ad altezze tanto minori, quanto maggiori saran quelle cui il barometro è trasportato. Or se l'aria non fosse condensata inferiormente dal peso delle parti superiori, ma avesse a tutte le altezze un'egual densità, questo mezzo di misurar le altezze dei luoghi sarebbe d' una facilità incomparabile. Ma poichè, come ho già detto, ad altezze maggiori nell' atmosfera corrispondono densità minori nell' aria, non è permesso conchiudere dalla diminuzione della colonna di mercurio nel barometro l'altezza cui questo si è trasportato, se prima non è nota la legge colla quale le densità dell' aria corrispondono ai pesi che la comprimono. Questa legge però con un grandissimo numero di sperienze fatte in Europa in America e in Affrica ad altezze fra loro diversissime, è stata felicemente determinata dai Fisici; ed è, che le condensazioni dell' aria sono costantemente proporzionali ai pesi comprimenti, purchè non varii la temperatura.

2. Stabiliti questi principj, non è difficile il trovare una formola, colla quale dalle altezze del mercurio sostenuto nel medesimo tempo e ad un' egual tempera-

tura in due stazioni poste verticalmente una sopra l'altra, si conchiude la distanza delle due stazioni. A questo fine supponiamo che la temperatura dell'atmosfera e di tutti i corpi che vi sono immersi, e quindi anche la temperatura del mercurio nel barometro sia sempre eguale ed invariabile: che sia per esempio quella del ghiaccio indicata nei termometri dal grado zero di Reaumur o 32 di Farheneit. Chiamata 1 la densità del mercurio a questa temperatura, supponiamo eziandío che si determini con qualche esatto esperimento qual sia il rapporto della densità del mercurio a quella d'un tenuissimo strato d'aria compressa dal peso d'una colonna superiore dell'atmosfera, la qual sostenga il mercurio nel barometro ad una data altezza; e questa si chiami A'. Il detto rapporto che può trovarsi, come vedrem fra poco, in tre diverse maniere, sia quello di 1 ad $\frac{1}{D}$, o sia di $D:1$. In questo caso adunque alla densità 1 del mercurio corrisponde nel dato strato d'aria la densità $\frac{1}{D}$. Supponiam ora che l'altezza del mercurio nel barometro ad una data stazione ed in un dato tempo sia espressa per A. Egli è chiaro che a qualunque altra stazion superiore, la cui distanza dall'inferiore sia indeterminata e si chiami x, sarà nello stesso tempo indeterminata l'altezza del mercurio nel barometro, la qual potrà in conseguenza chiamarsi y. All'altezza x sopra la stazione inferiore sarà dunque l'aria compressa dal peso y; ed a questa compressione corrisponderà una densità, il cui rapporto alla den-

sità del mercurio potrà chiamarsi $\frac{1}{\delta}$. Avrem dunque, per la legge generale delle densità proporzionali ai pesi comprimenti, la proporzione

$$A' : y = \frac{1}{D} : \frac{1}{\delta}\text{; ed } \frac{1}{\delta} = \frac{y}{A'D}.$$

Avendo supposta variabile l' altezza x, possiamo anche supporre ch' ella cresca del suo differenziale dx; nel qual caso è manifesto che l' altezza del mercurio nel barometro dovrà in una maniera corrispondente non crescere ma calare del suo differenziale dy, e che il peso del nuovo strato infinitesimo d' aria sarà eguale al peso della quantità infinitesima di cui s' è diminuitó il mercurio sostenuto nel barometro. Ora eiascuno di questi pesi è uguale al volume moltiplicato nella densità; ed i volumi, per l' eguaglianza delle basi cilindriche, sono unicamente proporzionali alle altezze. Sarà dunque $\frac{1}{\delta} \times dx$ quantità che cresce eguale ad $1 \times dy$ quantità che cala, o sia $\frac{dx}{\delta} = -dy$; e sostituendo in luogo di $\frac{1}{\delta}$ il suo valore $\frac{y}{A'D}$, sarà $\frac{y\,dx}{A'D} = -dy$; e quindi $dx = -\frac{DA'dy}{y}$. L' integrale di quest' equazione è, come a tutti è noto, $x = -DA'ly + C$; e la costante C si determina ben facilmente, osservando che alla stazione inferiore dove x è zero, l' altezza del mercurio nel barometro è A. Sarà dunque

$o = -DA'lA + C$, e per conseguenza $C = DA'lA$; ed

$x = DA'lA - DA'ly = DA'(lA - ly) = DA'l\frac{A}{y}$, e

(posto a in luogo di DA') $x = al\frac{A}{y}$.

3. Niente è più agevole che il determinar per mezzo di questa formola in qual rapporto saranno le altezze del mercurio nel barometro corrispondenti alle altezze dell' atmosfera prese in una progression continua aritmetica. Siano le altezze dell'atmosfera x, x', x'', e quelle del mercurio nel barometro y, y', y''. Avrem dunque le tre equazioni $x = al\frac{A}{y}$; $x' = al\frac{A}{y'}$; $x'' = al\frac{A}{y''}$.

Dunque essendo x, x', x'' in progression continua aritmetica, nella progression medesima saranno anche

$al\frac{A}{y}$, $al\frac{A}{y'}$ ed $al\frac{A}{y''}$. Sarà dunque

$2al\frac{A}{y'} = al\frac{A}{y} + al\frac{A}{y''}$; e dividendo per a, poi passando dai logaritmi ai numeri $\frac{A^2}{y'y'} = \frac{A^2}{yy''}$. Dunque

$yy'' = y'y'$; e per conseguente $y : y' = y' : y''$, vale a dire che le altezze del barometro sono in una proporzion continua geometrica, quando quelle dell' aria sono in una proporzion continua aritmetica.

4. Ma non è questo il solo uso dell' equazione $x = DA'(lA - ly)$. Il suo principal vantaggio è anzi quel-

lo di somministrare immediatamente la distanza verticale di due stazioni poste l' una sopra l' altra, per mezzo dei logaritmi delle altezze alle quali il mercurio è sostenuto nel barometro in ciascuna delle medesime. Per dimostrarlo io comincio ad osservare che i logaritmi di quest' equazione procedenti dall' integrazione della frazione $\frac{dy}{y}$ sono iperbolici; ond' è che volendo far uso dei logaritmi volgari, converrà moltiplicarli pel logaritmo iperbolico di 10. Ciò posto, esprimendo per L i logaritmi volgari, l' equazion superiore diventerà
$x = DA'l\,10\,(LA - Ly)$. Prima di poter servirsi di quest' equazione è dunque necessario determinar il valore di DA', cioè il rapporto delle densità del mercurio e dell' aria compressa da un peso che si esprime coll' altezza A' del mercurio nel barometro. Ho già detto che questo rapporto può determinarsi in tre diverse maniere. Una di queste consiste nell' esplorare con un' estrema esattezza qual sia il peso dell' aria contenuta in un recipiente, pesando prima il recipiente stesso pien d' aria, e ripesandolo poi di quella vuotato quanto è possibile, non ommesso però di tener conto e del calore dell' aria medesima indicato dal termometro, e del peso che la comprime, il qual è indicato dall' altezza del barometro da osservarsi nel tempo dello sperimento. Da questo metodo, a dir vero, non può sperarsi una grande esattezza; ma ciò non ostante io riferirò quest' esperimento fatto già con somma diligenza dal cavalier Shuckburg, e da lui riferito alla pag. 558 del volume 67 parte 2ª. delle transazioni filosofiche di Londra. Egli osservò dunque, che stando

il barometro all'altezza di 29,27 pollici inglesi, ed il termometro di Farheneit a 53, fu il peso dell' aria a quel del mercurio come 1 ad 11364,6; onde segue che chiamata δ la densità del mercurio ed $\frac{1}{D}$ quella dell'aria, fu

$$\delta : \frac{1}{D} = 11364,6 : 1 ; \text{ e per conseguenza } D = \frac{11364,6}{\delta}.$$

Se la temperatura comune dell' aria e del mercurio fosse stata zero di Reaumur, non avremmo a far altro che sostituir nella formola $x = DA'l\,10\,(LA - Ly)$ il numero 11364,6 in luogo di D, e per A' l'altezza 29,27 ridotta alle antiche misure francesi delle quali sempre ci serviremo. Or le misure inglesi si riducono alle antiche francesi moltiplicandole per la frazione $\frac{100000}{106575}$; e per conseguenza 29,27 pollici inglesi corrispondono a 27,464 francesi, negligentando i decimali minori dei millesimi. Sarebbe dunque $DA' = 11364,6 \times 27,464$, e la formola si cangerebbe in $x = 11364,6 \times 27,464\,l\,10$ $(LA - Ly)$ presi i pollici dell' altezza barometrica per unità. Ma la temperatura dell' aria non fu quella del ghiaccio ma di 53 gradi di Farheneit corrispondenti a $9\frac{1}{3}$ di Reaumur. Dunque l'aria ed il mercurio ebber nell' esperimento una minor densità che alla temperatura del ghiaccio; e noi vedremo nelle seguenti sezioni, che il mercurio dal grado zero al grado $9\frac{1}{3}$ si dilata di 0,002262, e l'aria di 0,0471 dei volumi primitivi. Per applicar la formola alla temperatura del ghiaccio convien dunque dividere per 1,002262 l'altezza 27,464 del barometro, e per 1,0471 la densità D; poi nel valore di

D divenuto $\frac{11364,6}{1,0471\,\delta}$ sostituir $\frac{1}{1,002262}$ in luogo di δ.

Or con queste operazioni troveremo $A' = 27,402$; e

$D = \frac{11364,6 \times 1,002262}{1,047} = 10878$. Il coefficiente si cangerà dunque in $10878 \times 27,402\, l\, 10$. Per calcolarlo più facilmente, se ne prendano i logaritmi, e si troverà

$$
\begin{aligned}
L\ 10878 &= 4\ .\ 0365491 \\
L\ 27,402 &= 1\ .\ 4377823 \\
L\ .\ l\ 10 &= 0\ .\ 3622159 \\
\hline
L\ coeff. &= 5\ .\ 8365473
\end{aligned}
$$

Questo logaritmo del coefficiente suppone i pollici per unità; ma per aver una formola espressa da numeri minori, si sostituiscan le unità delle tese a quelle dei pollici, il che si otterrà sottraendo dal numero precedente il logaritmo di 72, o sia dei pollici contenuti nella tesa. Fatta questa sottrazione, si avrà il logaritmo del coefficiente in tese $= 3.9792148$; al qual corrisponde il numero 9532,7. Tal è il coefficiente dedotto dall' esperienza del cavalier Shuckburg, il quale però, come vedrem poi, dà quasi sempre le altezze troppo grandi.

5. La seconda maniera di calcolar il coefficiente, che è quella di cui io mi son servito, è nello stesso tempo e più facile e più sicura. Consiste questa nel determinar il rapporto dei pesi specifici del mercurio e dell'aria col metodo seguente. Si fan nello stesso tempo due osservazioni barometriche ad una distanza ver-

tical così piccola che lo strato d' aria compreso fra le due stazioni possa considerarsi come d'una densità uniforme. Imperocchè la differenza tra le due altezze del mercurio nei barometri indicherà allora la lunghezza della colonna mercuriale che fa equilibrio alla colonna aerea compresa fra le due stazioni: onde si potrà conchiudere la densità del mercurio essere a quella dell' aria nella ragion medesima in cui è la distanza delle due stazioni alla differenza delle altezze del mercurio nei barometri. Ora nel giorno 19 febbrajo 1792 io ho fatta quest'esperienza in Varena sul lago di Como, nel qual giorno fu l' aria alla temperatura del ghiaccio; e n' ho avuti i seguenti risultati. A 58 piedi e 10 pollici, cioè piedi 58,83333 sopra la superficie del lago l' altezza del barometro fu di linee 326,9; ed alla superficie del lago di linee 327,7. La temperatura del mercurio fu eguale nelle due stazioni, cioè d' un grado e $\frac{7}{9}$ di Reaumur. Ciò posto, le altezze barometriche ridotte, come spiegherò poi, alla temperatura del ghiaccio, sono di linee 326,75424, e 327,55384. La lor differenza fu dunque di linee 0,7996. Quando feci quest' osservazione, il termometro di Reaumur esposto all' aria aperta a ciel nubiloso fu a zero. Dunque essendo l' aria alla temperatura del ghiaccio $\frac{7996}{10000}$ di linea di mercurio alla stessa temperatura, fecero equilibrio a piedi 58,83333 d' aria compressa da un peso corrispondente alla media fra le due altezze del barometro, cioè a linee di mercurio 327,15404. In queste circostanze fu dunque il peso specifico dell' aria a quello

del mercurio come $\frac{7996}{10000}$ di linea a piedi 58,83333 d'aria equivalenti a linee 8471,99956. Si divida quest'ultimo numero per 0,7996, e si troverà il quoziente 10595,3, dal qual risulta essere stato nel tempo dell'osservazione il peso specifico dell'aria $= \frac{1}{10595,3}$ di quello del mercurio.

Nel coefficiente della formola abbiam dunque $D = 10595,3$; $A' = 327,15404$, e $l\ 10 = 2.3025851$; e presi i logaritmi

$$
\begin{aligned}
L\ 327,15404 &= 2.5147523 \\
L\ 10595,3 &= 4.0251133 \\
L.\ l\ 10 &= 0.3622159 \\
\hline
L\ coeff. &= 6.9020815
\end{aligned}
$$

Se da questo logaritmo che ha le linee per unità, si sottrarrà quello di 864 numero delle linee contenute nella tesa, il residuo 3.9655678 sarà il logaritmo del coefficiente in tese, al qual corrisponde il numero 9237,78.

Altre osservazioni fatte ad altezze minori ancora della precedente, e nelle quali si può con maggior ragione supporre uniforme la densità dell'aria posta fra le due stazioni, una cioè all'altezza di piedi 28,88; e l'altra di piedi 38,166 m'han dati i coefficienti 9255,34 e 9256,58.

Il coefficiente può in fine determinarsi anche di questa maniera. Si misuri o geometricamente o colla livellazione ordinaria la distanza verticale di due stazioni,

e si chiami Δ. La formola è in questo caso $\Delta = D A' l\, 10$ $(LA - Ly)$ per la temperatura del ghiaccio. Ma per le altre temperature si dovrà 1°. col metodo che spiegherò nella terza sezione, indurre le altezze apparenti A, y alle vere a, y'. 2°. se la distanza Δ non è molto grande, la temperatura della colonna d'aria che le corrisponde, si potrà considerare come costante prendendo una media fra quelle delle due stazioni; ed in questo caso se C, c esprimono i calori o le dilatazioni dell' aria per le temperature anzidette, la formola sarà

$\Delta = D A' \left(\frac{C + c}{2}\right) l\, 10\, (La - Ly')$. Si prenda in questa

per incognita il coefficiente costante $D A' l\, 10$, e si chia-

mi x; e sarà $\Delta = x \left(\frac{C + c}{2}\right) (La - Ly')$. Prendendo i

garitmi si ha quindi $Lx = L\Delta - L\left(\frac{C + c}{2}\right) - L(La - Ly')$.

Nel gran numero delle osservazioni del Sig. de Luc quella che più d' ogn' altra s' accosta alla temperatura del ghiaccio, è la prima della stazion seconda. In questa fu $\Delta = 71{,}472$ tese; le altezze corrette dei barometri

$a = 5222$, $y' = 5129$ sedicesimi di linea, e $\frac{C + c}{2} = 0{,}9924$.

Da questi dati vien l' equazione $Lx = L\,71{,}472 - L\,0{,}9924 - L.(L\,5222 - L\,5129) = 3.9651208$; al qual logaritmo corrisponde il numero $9228{,}3$; che in questo caso esprime il coefficiente $D A' l\, 10$.

In una delle osservazioni del General Roy la temperatura dell'aria fu un terzo di grado di Reaumur, cioè ben vicina a zero. La distanza delle stazioni fu di piedi inglesi 281 corrispondenti a tese di Francia 43,944. Le altezze corrette dei barometri furono 29,661, e 29,338 pollici. Finalmente il calor medio fu 1,0017. Quì dunque abbiamo $Lx = L\,43,944 - L\,1,0017 - L(L\,29,661 - L\,29,338) = 3.9649840$; al qual logaritmo corrisponde il numero $9225,4 = DA'l\,10$. Il medio dei cinque valori del coefficiente trovati con queste due osservazioni e colle tre mie è dunque 9240,69, o 9240,7; che ha per logaritmo 3.9657049. Conchiudiam dunque che la formola da cui son espresse le distanze verticali delle stazioni per la temperatura costante del ghiaccio, è $x = 9240,7\,(LA - Ly)$.

Per vedere con qualche esempio l'applicazione di questa formola, calcoliamo l'osservazione del General Roy posta quì sopra, negligentando la piccolissima dilatazion dell'aria corrispondente alla temperatura d'un sol terzo di grado di Reaumur. Nella formola $x = 9240,7$ $(La - Ly)$ avrem dunque $La - Ly = 0.0047553$, e

$$\begin{aligned} L.(La - Ly) &= 7\,.\,6771779 \\ L\,coeff. &= 3\,.\,9657049 \\ \hline Lx &= 1\,.\,6428828 \end{aligned}$$

A questo logaritmo corrisponde il numero 43,9423; e quindi l'altezza calcolata è minor della vera di $\frac{17}{10000}$ di tesa o ben poco più d'un centesimo di piede.

6. E quì si noti bene l'essenzial circostanza da noi

replicatamente indicata, che le due stazioni sian poste verticalmente l'una sopra l'altra o per lo meno ad una distanza orizzontal così piccola, che si possa senz' alcuno error sensibile negligentare. E invero a chi non è noto quante sian le variazioni e quanto considerabili, alle quali è soggetto il barometro ne' nostri climi? Or queste variazioni non accadon già dappertutto nel tempo medesimo; ma passan successivamente d'uno in altro luogo così che ben di rado sono eguali in luoghi sensibilmente distanti: e avviene anche talvolta, che mentre il barometro è stazionario in un luogo, e' soffre in un altro anche ad una distanza non molto grande una variazion considerabile. Colui dunque che dalle osservazioni barometriche fatte nello stesso tempo in due luoghi situati ad una sensibil distanza orizzontale ne volesse conchiudere col metodo esposto qui sopra la corrispondente altezza delle stazioni, si esporrebbe al pericolo di cadere in gravissimi errori, attribuendo alla diversa altezza dei luoghi anche quella porzione di diversità delle altezze barometriche, ch'è tutta propria delle variazioni diverse ivi accadute nel peso dell' atmosfera. Eccone una prova evidentissima. La distanza di Milano e di Como non eccede la terza parte del grado quarantacinquesimo di latitudine. Ora nel dicembre del 1792 e nel gennajo del 93 da 41 osservazioni corrispondenti fatte in 18 giorni diversi a Milano dal celebre matematico ed astronomo Abate Oriani, il quale da gran tempo m'onora della sua amicizia, ed a Como da me, risulta nelle altezze dei nostri barometri de' quali ci è nota la corrispondenza, una differenza media di linee 3, 222 del mercurio alla temperatura di gradi 3, 55 di

Reaumur. Ma le variazioni del peso dell' aria o delle altezze barometriche avvenute da un giorno all' altro furono ben diverse nelle due stazioni di Milano e di Como. E invero nello spazio di quattro giorni consecutivi ne' quali non variò guari la temperatura del mercurio, si ebbero in esse le seguenti variazioni. Dal primo giorno al secondo il barometro s' abbassò a Milano di linee 5, 725, a Como di sole linee 5, 423. Dal giorno secondo al terzo i barometri s' alzarono, ma l' alzamento fu a Milano di linee 4, 608, e a Como di 4, 790. Dal terzo al quarto vi fu un abbassamento a Milano di linee 5,585, ed a Como di 5,312. Da questa ineguaglianza di variazioni ne risultò dunque una differenza nelle due altezze dei barometri non costante ma sempre decrescente; e questa assai diversa dalla differenza media di cui sopra ho parlato. In fatti la differenza nel primo giorno fu di linee 3,442; nel secondo di 3,150; nel terzo di 2,972; e nel quarto di 2,695. Di qui è che se per mezzo di queste giornalière osservazioni si calcolerà la differenza d'altezza nelle due stazioni, questa si troverà sempre minore da un giorno all'altro, benchè sia certo non essersi fatto alcun cangiamento nella situazione e quindi nell' altezza relativa delle due stazioni. Ma se io, in vece di restare a Como, avessi scorsa in quei quattro giorni tutta la lunghezza del lago, e avessi avuto in quattro diverse osservazioni fatte in riva del medesimo quelle stesse altezze barometriche ch'ebbi a Como, ne avrei potuto conchiudere con questo metodo troppo fallace, che il livello del lago va di continuo abbassandosi da Como fino a Gera, e che la quantità di quest' abbassamento è di tese 9 $\frac{1}{2}$ all' incirca. Ma

calcolata, come vedremo altrove, l'altezza del livello medio del lago sopra l'orto botanico di Brera in Milano col prender le medie d'un grandissimo numero d'osservazioni corrispondenti fatte a Milano e a Como, a Milano e a Domaso borgo poco distante da Gera, questa si trovò non molto diversa per Como e per Domaso, essendo per Como di tese 42,619, e per Domaso di tese 41,821; la cui differenza non è che di tese 0,798, vale a dire che non arriva a 5 piedi. Ma anche questo assai minore abbassamento del lago non può stare in verun modo. Imperciocchè se nella sua superficie avesse luogo qualche sensibil differenza di livello, dovrebbe questa attribuirsi alla quantità dell'acque portate dai fiumi influenti, la quale spianandosi successivamente esca al fine dall'emissario. Or ciò posto, la maggiore altezza dovrebbe trovarsi a Domaso vicino all'ingresso dell'Adda e non a Como dov'entran pochissime acque, cioè quelle del torrente Cosia accanto alla città stessa, e della Breggia vicin di Cernobio. Quindi si fa manifesto in qual conto si debban tenère le livellazioni non sol di laghi, ma anche di lunghissime strade, che varj dotti Fisici han creduto di poter fare in questa maniera. Anche in alcune osservazioni corrispondenti fatte alla riva del mare in Marsiglia dal Sig. Bernard già astronomo dell'osservatorio di quella città ed in Tolone da me, io trovai già una sensibil differenza nelle altezze barometriche, la quale non può certo attribuirsi ad una corrispondente inclinazione nella superficie del mare; il cui livello, per una distanza che non arriva a 12 leghe di ventiquattro al grado, dev'essere quasi perfettamente orizzontale. Io pensai nondimeno altre

volte, ch' eziandio viaggiando si potesse livellare la via trascorsa per mezzo delle osservazioni barometriche, quando queste fosser fatte alle stesse ore concertate da due persone che vadan una dietro l' altra ed a stazioni non mai più distanti fra loro di sei o sette miglia. E così feci già nel principio di settembre del 1777 lungo tutta la strada che va da Bellinzona al lago di Lucerna pel monte S. Gottardo; ma avendo lasciati a Parigi con tutti i miei libri e le mie carte anche i registri di quella livellazione senza aver mai potuto ricuperar nulla, io non so più quali ne fossero i precisi risultati. Mi ricordo però che l' altezza della cima di Fieudo, alla quale col celebre professor Volta salii dall' ospizio dei Cappuccini, fu per le mie osservazioni alquanto minore di quella, che il dotto Padre professor Pini trovò pochi anni dopo col medesimo metodo, ma che la differenza fu d'un picciol numero di tese. Non abbiamo però ragione di fidarci gran fatto neppure di questo metodo; poichè se alle due estremità della via che si scorre e misura in un giorno, seguirà una variazion diversa nel peso dell' aria, questa o gradatamente nelle stazioni successive, o tutta ad un tratto da una in un' altra stazione entrerà nelle osservazioni barometriche e le renderà incerte e fallaci. Il solo mezzo di determinar col barometro le altezze dei luoghi posti ad una considerabil distanza orizzontale, è quello di fare in ciaschedun dei medesimi un grandissimo numero d' osservazioni corrispondenti in molti giorni diversi e prenderne poi i risultati medii; nel qual caso gran disgrazia sarebbe se le diverse variazioni accadute nel peso dell' aria alle due stazioni non si compensasser fra loro. Con questo metodo

l' altezza del livello medio del lago di Como sopra l'orto botanico di Brera a Milano si trova, come vedrem poi, affatto eguale a quella che risulta da un' esattissima misura geometrica del sig. Abate Oriani, essendo la differenza loro di $\frac{1}{103}$ di tesa, cioè minore di un quinto dell' antico piede di Parigi sopra 253 e $\frac{1}{2}$. Ma tutte queste difficoltà non ostanti, io ho creduto poter anche solo e con un solo barometro determinar la differenza di livello fra i due laghi di Como e di Lugano; il che come possa e con quali e quante precauzioni eseguirsi, il vedrem poi nella relazion che farò di questa livellazione.

SEZIONE 2.

Effetti del calore nella densità e nel peso specifico del mercurio.

7. Dalle cose finor dichiarate ognun vede quanto semplice e spedito sarebbe il metodo di misurar col barometro le altezze dei luoghi nella supposizione, che la temperatura dell'atmosfera e dei corpi che in quella son contenuti, fosse mai sempre ed in ogni luogo invariabile. Ma la natura che nelle leggi e operazioni sue non consulta la facilità ed il comodo de' nostri calcoli, vuole anzi, che in luoghi e tempi diversi anche la temperatura dell' aria e degli altri corpi soffra di molte e di gran variazioni. E poichè l' esperienza c' insegna essere ogni corpo dilatato dal calore e condensato dal freddo, chiara cosa è che queste dilatazioni e condensazioni diverse avendo luogo nell' aria e nel mercurio, ne faran continuamente variare la densità ed il peso

specifico. E di qui è che date due colonne di mercurio sospese nel barometro, le lor pressioni alle basi allor solo saran proporzionali alle semplici altezze, quando sarà eguale la lor temperatura; ma se questa è diversa, le pressioni saran proporzionali nel tempo stesso e alla lunghezza delle colonne e alla densità e peso specifico del mercurio corrispondenti al calor diverso delle medesime. E per egual modo essendo l' aria dal calor dilatata, e calando per conseguenza al crescer di questo la densità sua, se questa cresce col crescer de' pesi comprimenti, scemerà eziandío all' aumentar del calore, o, usando il linguaggio ed i termini dei matematici, le densità dell' aria saranno nella ragion diretta dei pesi comprimenti e nell' inversa delle differenti quantità del calore che la dilata. Ciò posto, se a due date stazioni l' aria sarà compressa da due pesi A', a proporzionali alle due altezze che avrà il mercurio nei barometri quivi osservati; chiamate D, d le due densità dell' aria alle stazioni medesime, non potrà aver luogo la proporzione $A:a = D:d$, se non ha luogo eziandío la condizione, che l' aria sia egualmente calda nell' una e nell' altra stazione, e che anche le due colonne del mercurio abbiano un' egual densità e per conseguenza lo stesso calore. Ma se diverso sarà il calor del mercurio nei due barometri, bisognerà sapere di quanto la colonna più o men calda sia dilatata o condensata, e d' altrettanto diminuirne o accrescerne la lunghezza; ed allor solo si potrà dire che i pesi dai quali l' aria è compressa, sono proporzionali alle due altezze barometriche. Supponiamo che per questa correzione l' altezza A si cangi in A', e i pesi comprimenti sa-

ranno in questo caso nel rapporto di A ad A'. Per aver ora anche il rapporto delle densità dell' aria alle due stazioni nella supposizione che il suo calor sia diverso, chiamiamo C,c i due calori dell' aria alle due stazioni: e poichè, come sopra abbiam detto, le densità della medesima sono nella ragion diretta dei pesi comprimenti e nell' inversa dei calori dilatanti, se ne avrà la proporzione $D:d=\frac{A'}{C}:\frac{a}{c}$. Nè è men chiaro che da questa proporzione sen deduce immediatamente quest' altra $DC:dc=A':a$, la qual significa esser le altezze corrette del mercurio nella ragion composta della densità e del calor dell' aria che nei barometri lo sostiene. Ma qui non è da ommettersi un' osservazione che molto contribuirà a mettere in chiaro il vero significato di questa proposizione. Quando adunque io ho detto che le densità dell' aria sono nella ragione inversa dei calori, non ho inteso col nome di calore significar altro fuorchè l' effetto sensibile e noto, che una cagione occulta e mal nota produce nell' aria, come in tutti gli altri corpi, or dilatandola ed or condensandola. La quantità precisa di cui un dato volume d' aria compressa da un dato peso ad una data temperatura indicata dal termometro e che si considera come primitiva, vien poi dilatata o condensata al variar della temperatura, questa sola si vuol intendere pel nome di calore o di grado di calore. Supponiamo a cagion d' esempio che il peso A' sia doppio del peso a: se fosse possibile che l' aria compressa dal peso A' fosse eziandio dilatata dalla cagion del calore in uno spazio due volte maggior di quello, che sotto alla stessa pressione avrebbe occupato nel-

la temperatura primitiva da cui cominciano le dilatazioni e le condensazioni, e che nello stesso tempo l'aria compressa dal peso a conservasse la temperatura primitiva, sarebbe allora $A'=2a$, e $C=2c$; e la proporzione $D:d=\frac{A'}{C}:\frac{a}{c}$ si cangerebbe in $D:d=\frac{2a}{2c}:\frac{a}{c}$;

vale a dir, che sarebbe $D=d$, o sia, che l'aria alle due stazioni avrebbe un'egual densità, conseguenza manifesta della supposizion fatta; poichè quell' aria che pel doppio peso comprimente dovrebbe restringersi fino alla metà del suo volume, si dovrebbe nello stesso tempo per l'azione della cagion del calore dilatare in uno spazio due volte più grande.

8. Di niun uso sarà dunque la formola semplicissima del numero 5, che con un facile e speditissimo calcolo determina per mezzo delle altezze barometriche le verticali distanze delle stazioni, toltone il caso in cui abbia luogo la supposizione, che la temperatura e del mercurio e dell' aria sia quella appunto del ghiaccio che si scioglie; il qual caso, nelle continue variazioni cui va soggetta la temperatura dell' atmosfera e dei corpi che ne son circondati, non si avvera che rarissime volte. E certo ogni speranza d' un felice esito sarebbe del tutto perduta, se alcuni dottissimi Fisici non fosser giunti coll' ajuto d'un gran numero d'esperimenti esattissimi a scoprire la quantità precisa e l' ordin costante, o vogliam dire le leggi colle quali l' aria ed il mercurio si dilatano e si condensano alle diverse temperature che dai gradi del termometro sono indicate. Questo ha fatto prima d' ogn' altro il Sig.

de Luc, alle cui dotte, numerose, e ben si può dire ostinate ricerche siam debitori del maraviglioso perfezionamento al qual è giunto oggimai il metodo di misurar col barometro le altezze dei luoghi. E dall'esempio dell' ingegnoso Fisico di Ginevra eccitati due illustri inglesi, voglio dire il cavaliere Shuckburg ed il General Roy, hanno anch'essi, e principalmente quest' ultimo, con molti e sottili esperimenti contribuito moltissimo ad illustrar questa materia ed a stibilire e metter in chiaro le leggi con cui a temperature diverse corrispondon le dilatazioni e le condensazioni del mercurio e dell' aria.

9. Quanto al mercurio, avendo il sig. de Luc posto il barometro in una stufa, di cui andò scaldando l' aria successivamente, egli trovò che siccome il suo termometro si alzava gradatamente dal segno del ghiaccio a quello dell' acqua bollente, così una colonna di mercurio di 27 pollici francesi, la quale era allora sostenuta nel barometro dalla pressione dell' atmosfera, si allungava essa pure gradatamente: e credè poter conchiudere dalla sua sperienza, che ad un accrescimento di calore, per cui il termometro dal segno del ghiaccio salisse a quello dell'acqua bollente, la colonna del mercurio di 27 pollici verrebbe a dilatarsi di 6 linee o di un mezzo pollice. Se quello adunque si supporrà di che il sig. de Luc non ha mostrato avere alcun dubbio, cioè che questa dilatazion del mercurio nel barometro sia uniforme, con un calcolo speditissimo si troverà di quanto un pollice di mercurio si dilati per ogni grado del termometro. Imperciocchè se la dilatazion totale d'un mezzo pollice si dividerà per 80, nu-

mero dei gradi contenuti fra il ghiaccio e l'acqua bollente, si troverà che ad ogni grado corrisponde nella colonna di 27 pollici una dilatazione di pollici 0,00625, la qual divisa per 27 ci darà la dilatazione di ciascun pollice = 0,0002315.

Quì però non si vuol ommettere un' osservazione, la quale comechè non sia per se medesima di molta importanza, servirà però a contentare que' Fisici diligentissimi che niuna minuzia consentono potersi ne' calcoli disprezzare; nè gli accettan per buoni e legittimi, se non sono accompagnati dalla più scrupolosa esattezza. Il sig. de Luc ha graduati i suoi termometri a Ginevra, ove la pression dell' aria suole nel barometro sostenere il mercurio allo intorno di pollici 27; e sotto a questa pressione appunto fu da lui segnato nelle scale dei termometri il punto che corrisponde al calore dell' acqua bollente. Ma nei termometri che comunemente si costruiscono nelle pianure d' Inghilterra, di Francia e d' Italia, quel punto medesimo si suol segnare quando l' altezza del mercurio nel barometro non è di 27 ma di 28 pollici. Richiedendosi adunque, come tutti i Fisici ben sanno, un calor tanto maggiore per far bollir l' acqua, quanto è maggiore la pression dell' aria che s' oppone alla formazione del vapor espansibile da cui nasce l' ebollizione, egli è manifesto che sotto una pressione di 28 pollici sarà il calore dell' acqua bollente, maggior di quello che il sig. de Luc ha segnato ne' suoi termometri col grado 80. Ma l' incomparabil diligenza di quello stesso industriosissimo Fisico ne somministra il mezzo di riparar facilmente a questo leggiero inconveniente, e di fare alla dilatazione

d' ogni pollice di mercurio la piccola correzione di cui abbisogna, quando si voglia applicare alla graduazione dei nostri termometri graduati, come ho detto, sotto una pressione di 28 pollici. Imperocchè, avendo egli fatta una lunghissima serie d' esatte sperienze per determinare i diversi gradi di caldo, che si richieggono per far bollire l' acqua compressa da diversi pesi dell' atmosfera, ha raccolto alfine anche in questo argomento il frutto ben dovuto a tante sue fatiche; ed è giunto a stabilire la seguente regola generale. Per esprimere in gradi del suo termometro il calore dell' acqua bollente per una pression qualunque dell' atmosfera, si esprima in sedicesime di linea l' altezza del barometro, che corrisponde alla detta pressione, e se ne prenda il logaritmo: si moltiplichi questo per $\frac{99}{200000}$ o sia per 0,000495, e si sottragga dal prodotto il numero 10387: il residuo ci farà conoscere il calore dell' acqua bollente espresso in parti centesime dei gradi del suo termometro *(a)*. Volendo noi dunque al caso nostro applicar questa regola, faremo il calcolo per un' altezza del barometro di 28 pollici; e troveremo che sotto questa pression dell' aria l' acqua non può bollire, se il suo calore non giunge a gradi 80,79 del termometro del sig. de Luc. Ma ne' suoi sperimenti la dilatazion del mercurio per un calore di gradi 80 fu di un mezzo pollice: la dilatazion medesima per un calore di 80,79 dei medesimi gradi sarà dunque di pollici

(a) Recherches sur les modifications de l' atmosphère. N. 962.

$\frac{0,5 \times 80,79}{80} = 0,5049375$; e questa per una colonna di 27 pollici. Di che segue, la dilatazione per un pollice solo dover essere la ventisettesima parte della medesima, cioè pollici 0,0187014. Or questa dilatazione corrispondente a gradi 80, 79 del termometro del de Luc deve distribuirsi in soli 80 gradi dei nostri; ond'è che per questi ad ogni grado di calore corrisponde in ogni pollice di mercurio una dilatazione

$= \frac{0,0187014}{80} = 0,0002337$; la qual viene ad essere, come deve, alquanto maggiore di quella che sopra abbiam trovata pel termometro del sig. de Luc; ma la differenza loro non eccede 22 diecimilionesime di pollice, e potrebbe quindi negligentarsi senz' alcun sensibile errore.

10. Secondo gli sperimenti del cavalier Shuckburg riferiti nella 2ª. parte del vol. 67 delle transazioni filosofiche di Londra, pag. 566—67, la dilatazione d'una colonna di 30 pollici inglesi di mercurio nel passare dalla temperatura del ghiaccio a quella dell'acqua bollente, fu di pollici 0,5472, e per ogni grado del termometro di Farheneit $= \frac{0,5472}{180} = 0,00304$. Divisa questa per 30, si troverà dunque la dilatazion d'ogni pollice corrispondente ad un grado del suddetto termometro $= 0,0001013$. Si moltiplichi questa per la frazion $\frac{9}{4}$, e si avrà la dilatazion d' ogni pollice di mercurio per un grado del termometro di Reaumur

$=0,0002279$ ben poco diversa da quella del sig. de Luc adattata ai nostri termometri, della qual è minore di sole 58 diecimilionesime d' un pollice. E si noti che nei termometri inglesi si suol segnare il grado dell' acqua bollente sotto una pression dell' aria equivalente all' altezza barometrica di 30 pollici inglesi che corrispondono a 28,149189 francesi, altezza che non eccede quella di 28 pollici di $\frac{15}{100}$ d' un pollice.

11. Il general Roy *(a)* dopo d' aver diligentemente purgato d' aria un barometro coll' ebollizion del mercurio, il fece passare dalla temperatura di 32 gradi di Farheneit a quella di zero; e trovò che una colonna di mercurio di 30 pollici si condensò, passando 1°. dai 32 ai 22 gradi di pollici 0,0338; 2°. di 0,0681 dai 32 ai 12; 3°. di 0,1029 quando giunse a 2 gradi; 4°. finalmente di 0,1099 pervenuta a zero di Farheneit.

Fattala indi passare dai 32 ai 212 gradi, o sia dalla temperatura del ghiaccio a quella dell' acqua bollente, osservò le seguenti dilatazioni, che io non porterò oltre il grado 92 corrispondente a 26 e $\frac{2}{3}$ di Reaumur, poichè mai non accade nei nostri climi di far osservazioni barometriche ad un maggior grado di caldo.

Gradi	*Dilatazioni*
32	0 , 0000
42	0 , 0333
52	0 , 0661
62	0 , 0984
72	0 , 1302
82	0 , 1615
92	0 , 1922

(a) Vedi il citato volume delle transazioni filosofiche, pag. 665 e seguenti.

Con questi dati è agevolissimo il calcolare le condensazioni e le dilatazioni di ciaschedun pollice di mercurio, ed il ridurle dalla scala di Farheneit a quella di Reaumur più generalmente adottata dagl' italiani; ed ecco in qual modo.

Se una colonna di 30 pollici di mercurio si condensa di pollici 0,0338 dai 32 ai 22 gradi, egli è chiaro che ai gradi 22 i 30 pollici son ridotti a 29,9662. Or poichè la condensazion d' ogni pollice è proporzionale a quella dell' intera colonna, un pollice di mercurio ai 22 gradi di Farheneit sarà ridotto a

$\frac{29,9662}{30} = 0,998873$, e la sua condensazione sarà per conseguenza di 0,001127. Si osservi che a 22 gradi di Farheneit corrispondon -4 e $\frac{4}{9}$ di Reaumur: e poichè 4 e $\frac{4}{9}$ è a 5 come 8 a 9, sarà la condensazione pel grado $-5 = 0,001127 \times \frac{9}{8} = 0,001268$.

Essendo medesimamente la condensazione dai 32 ai 12 gradi 0,0681, la colonna di 30 pollici si trova ridotta pel duodecimo grado a 29,9329, e quella d' un pollice solo a 0,99773; onde la condensazione per questo grado è di pollici 0,00227. Dunque pel grado -10 di Reaumur ella sarà $= 0,00227 \times \frac{9}{8} = 0,002554$.

Al grado 0 di Farheneit i 30 pollici non son più che 29,8901; ed ogni pollice si riduce a 0,996336. La condensazione d' un pollice è dunque $= 0,003664$. Ma a zero di Farheneit corrisponde $-14\frac{2}{9}$ di Reaumur; e quindi per aver la condensazione corrispondente a -15, convien fare la proporzione $14\frac{2}{9} : 15$, o sia $128 : 135 = 0,003664 : 0,003,864$. Ecco dun-

que la serie delle condensazioni d' un pollice di mercurio da o a — 15 di Reaumur calcolata di 5 in 5 gradi

Gradi	*Condensazioni*
0	0 , 000000
— 5	0 , 007268
— 10	0 , 002554
— 15	0 , 003864

Applicando lo stesso metodo alle dilatazioni, trovo che pel grado 42 di Farheneit la colonna di 30 pollici divien di 30 , 0333, ed ogni pollice si cangia in 1,00111, il che vuol dire che pel grado anzidetto la dilatazion d'un pollice è 0,00111. Dunque pel grado + 5 di Reaumur sarà $0,00111 \times \frac{9}{8} = 0,001249$. Si continui il calcolo nello stesso modo; e si avran le dilatazioni d' ogni pollice quali si veggono espresse nella seguente tavoletta.

Gradi	*Dilatazioni*
0	0 , 000000
5	0 , 001249
10	0 , 002478
15	0 , 003690
20	0 , 004882
25	0 , 006056
30	0 , 007208

Trovate così di 5 in 5 gradi le condensazioni e

dilatazioni d' ogni pollice di mercurio espresse in parti milionesime di pollice, si avranno con una facile interpolazione anche quelle di grado in grado dal — 15 al + 30, come si può veder nella tavola posta in fine di questa memoria.

12. Considerando questa tavola l' ispezion sola della colonna delle differenze, ci fa immediatamente conoscere che queste non sono equabili nel mercurio del barometro, come nei gradi del termometro, e quindi che le condensazioni e dilatazioni apparenti del mercurio nel barometro non sono uniformi, come il de Luc e lo Shuckburg le han supposte. E questa è la ragione per cui dovendosi, come fra poco dichiarerò, applicare alle altezze del mercurio nei due barometri osservati a due stazioni diverse una correzione allorchè non hanno esattamente amendue il calor medesimo, io ne' miei calcoli mi servo delle dilatazioni e condensazioni ineguali di questa tavola, anzichè delle eguali degli altri due Fisici: e ciò perchè l' ineguaglianza suddetta mi è sembrata risultare da una maggior diligenza usata dal General Roy ne' suoi sperimenti; e più ancora perchè una sì fatta ineguaglianza mi sembra una conseguenza necessaria della imperfezion del vuoto nella parte superior del barometro, nella quale o un residuo anche menomo d' aria, o la vaporizzazione stessa del mercurio scoperta già dal celebre Daniel Bernoulli, e poi dallo Smeaton e da altri Fisici confermata, dee produrre una resistenza sempre crescente col crescer del calore. E chi non vede che questa crescente resistenza non lascerà salire il mercurio nel barometro a tutta quell' altezza alla qual dovrebbe ascen-

dere pel suo peso specifico corrispondente ai varj gradi di temperatura? Or la correzione è da farsi, come vedremo, non al peso specifico e alla densità del mercurio, ma all' altezza apparente del medesimo osservata nel barometro alle due stazioni, quando in esse la temperatura del mercurio è diversa.

Non è però da credere che quest' ineguaglianza nelle apparenti e successive dilatazioni del mercurio nei barometri esposti ad un calor crescente, sia tanto grande che non possa senza grave errore negligentarsi nel calcolo delle altezze dei luoghi; poichè l' errore sarebbe anzi tanto minuto, che a pochissimo monterebbe il volerne pur tener conto. E per chiarirsene facilmente, basta il riflettere che nelle osservazioni barometriche non accaderà quasi mai, quando si fanno a stazioni d' altezza ineguale, che la temperatura del mercurio nel barometro o salga oltre il grado + 25 o discenda più del − 10 nella scala di Reaumur. Or la dilatazione del grado + 25 è nella tavola 0,006056, e la condensazione pel grado − 10 è 0,002554; la cui somma 8610 divisa per 35 numero dei gradi compresi tra + 25 e − 10, dà 0,000246. Questa sarebbe dunque la dilatazion del mercurio corrispondente ad un sol grado, supposto che fosse uniforme. Per dimostrar ora quanto piccola diversità nascerebbe nel calcolo delle altezze dei luoghi dall' uso o di questa dilatazione uniforme o della inegual della tavola, ne farò l' applicazione ad un esempio in cui dovrebb' essere delle più grandi. Supponiam che il calore così dell' aria come del mercurio sia alla stazione inferiore di gradi + 6, ed alla superior di − 6, differenza di temperatura as-

sai grande e che rare volte ha luogo in siffatte osservazioni. Sia di più il mercurio nel barometro inferiore ad una delle maggiori altezze, qual è quella di 29 pollici o linee 348, nel qual caso anche la correzion pel calore, che dev' esser proporzionale a quest' altezza, sarà pure una delle maggiori. Sia finalmente l'altezza del barometro superiore di linee 248. Poichè la colonna d'aria, di cui si vuol misurare l'altezza, ha ne' suoi due estremi le temperature + 6 e — 6, possiam considerarla come se fosse in tutta la lunghezza d'una temperatura uniforme, cioè del grado zero, ch'è appunto la media frà le due date. Questa supposizione, a dir vero, è alquanto arbitraria; ma si vedrà in appresso che se ne può far uso nel calcolo delle altezze senz' alcuno error considerabile. La formola del numero 5 relativa alla temperatura del ghiaccio potrà dunque applicarsi a quest' esempio, purchè si faccia all' altezza dei barometri la debita correzione. Questa dimostrerò fra poco che si fa, moltiplicando l'altezza apparente del barometro inferiore per la differenza delle due dilatazioni del mercurio corrispondenti ai diversi gradi della lor temperatura, o per la somma, se le temperature son di grado contrario, e sottraendone poi il prodotto dalla medesima altezza apparente. Quì dunque, secondo la tavola, abbiam la dilatazione del grado $+ 6 = 0,001497$, e la condensazione o sia la dilatazione di grado contrario $- 6 = 0,001523$; la somma delle quali è 0,00302. Per questa frazione si moltiplichi l'altezza 348 del barometro inferiore, e se ne avrà il prodotto 1,05096, il qual sottratto da 348 lascia il residuo 346,95 altezza corretta del barometro inferiore. Sostituiti questi valori nella

formola del numero 5, e presi i logaritmi, avremo

$$L\,a = 2 \,.\, 5402669$$
$$L\,y = 2 \,.\, 3944517$$
$$Diff. = 0 \,.\, 1458152$$

Si prendano i logaritmi di questa differenza e del coefficiente costante, e si avrà

$$L\,.\,Diff. = 9 \,.\, 1638028$$
$$L\,.\,Coeff. = 3 \,.\, 9657049$$
$$L\,x = 2 \,.\, 1295077$$
$$x = 1347,44 \text{ tese.}$$

La distanza verticale dei due strati orizzontali dell'aria, in cui si fan le osservazioni, è dunque di tese 1347, 44.

Supponiam ora la dilatazione uniforme e di 0,000246 per grado; e quindi di 0,002952 per 12 gradi. Fatta come sopra, la correzione del barometro inferiore, questa si troverà ridotta a linee 346,97; e continuato il calcolo si giugnerà al risultato $x = 1347,66$ maggior dell' altro di $\frac{20}{100}$, cioè meno d' un quarto di tesa sopra un' altezza di quasi 1350.

Noi abbiam dunque tre dilatazioni uniformi per ogni grado di Reaumur ben poco diverse fra loro; e sono per lo sperimento del de Luc, 0,0002337; per quei dello Shuckburg, 0,0002270; e per quei finalmente del Roy, 0,000246, la media delle quali viene ad essere 0,0002359 ovvero 0,000236.

SEZIONE 3.

Riduzione da farsi alle altezze del mercurio nei barometri quand' hanno una diversa temperatura.

13. Trovata così e stabilita la precisa quantità con cui a' diversi gradi del termometro attaccato al barometro corrispondon le dilatazioni e le condensazioni del mercurio e quindi le sue varie altezze nel barometro stesso, non sarà cosa difficile il determinar eziandío quale correzion debba farsi alle altezze barometriche, allorchè il mercurio sostenuto nei tubi alle due stazioni non avrà esattamente la temperatura medesima. Riprendiamo a questo fine la formola del num°. 5, cioè

$x = 9240,7 \; L \frac{a}{y}$, alla quale siam pervenuti, supponendo che la temperatura così dell' aria che preme, come del mercurio che le fa equilibrio, non sia diversa da quella del ghiaccio che si scioglie. Non potrem noi dunque applicar questa formola anche ai casi in cui il mercurio sostenuto nei barometri abbia una temperatura diversa? Sì potremo, se per mezzo delle note dilatazioni e condensazioni del mercurio corrispondenti a' varii gradi di temperatura, ridurrem prima le varie altezze del mercurio a quelle che avrebbe, se la sua temperatura fosse quella del ghiaccio: ed ecco come questo si potrà fare. Sia A l' altezza del barometro inferiore, a quella del superiore; e T', t' esprimano i gradi del termometro di Reaumur attaccato a ciaschedun

dei barometri, il mercurio del qual termometro trovandosi nelle circostanze medesime che il mercurio contenuto nei barometri, serve per conseguente ad indicarne la temperatura. A questi gradi corrispondano le dilatazioni $\frac{M}{n}$, $\frac{m}{n}$, le quali saran positive o negative, secondo che i gradi del termometro saran sopra o sotto allo zero. Le altezze A, a non son dunque che apparenti, e dovran ridursi alle altezze, che avrebbero alla temperatura costante del ghiaccio, e che chiameremo le altezze vere. Sian queste A', a'; ed è chiaro che le altezze apparenti A, a non son altro che le altezze vere A', a' accresciute o diminuite della quantità corrispondente alla lor dilatazione o positiva o negativa. Or essendo queste dilatazioni espresse dalle frazioni $\frac{M}{n}$, $\frac{m}{n}$, sarà per conseguenza $A = A' + \frac{M\,A'}{n}$, ed $a = a' + \frac{m\,a'}{n}$. Per mezzo di quest' equazioni si trova facilmente essere $A' = \frac{n\,A}{n + M}$, ed $a' = \frac{n\,a}{n + m}$; e quindi $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(\frac{n + m}{n + M}\right)$. Si riduca in serie la frazione $\frac{n + m}{n + M}$; e si avrà

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 + \left(\frac{m - M}{n}\right) + M\left(\frac{M - m}{n^2}\right) + M^2\left(\frac{m - M}{n^3}\right) \text{ec.}\right)$$

$$= \frac{A}{a}\left(1 - \left(\frac{M - m}{n}\right) + M\left(\frac{M - m}{n^2}\right) - M^2\left(\frac{M - m}{n^3}\right) \text{ec.}\right)$$

$$= \frac{A}{a}\left(1 - (M - m)\left(\frac{1}{n} - \frac{M}{n^2} + \frac{M^2}{n^3} - \frac{M^3}{n^4} \;\ldots\ldots \text{ec.}\right)\right)$$

Essendo adunque nel caso nostro $n = 1000000$, laddove M anche pel grado 25 non giunge, come si vede nella tavola, che a 6056, il termine $\frac{M^2}{n^3}$ con tutti i seguenti potrà sicuramente negligentarsi. Resterà dunque

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - (M-m)\left(\frac{1}{n} - \frac{M}{n^2}\right)\right) = \frac{A}{a}\left(1 - \left(\frac{M-m}{n}\right)\left(\frac{n-M}{n}\right)\right)$$

ove il moltiplicatore $\frac{n-M}{n}$ sarà, come vedrem tosto, quasi sempre così vicino all' unità, che sarebbe inutile il farne conto. Dalla semplice ispezione di questa formola appare manifestamente non dover farsi riduzion nessuna alle altezze barometriche, quando eguale è la temperatura del mercurio nei due barometri: poichè in questo caso essendo $M = m$, il moltiplicatore $M - m$ diventa zero, e si ha $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 - 0) = \frac{A}{a}$; il che vuol dire che per una temperatura eguale nei due barometri, qualunque ella siasi, non si cangia in alcun modo il rapporto delle altezze loro. La cosa è tanto chiara, che, sebbene il sig. de Luc abbia creduto e positivamente detto il contrario, non è da temere che l' autorità di quel dotto Fisico possa trar seco alcun altro in errore. Egli non ha avvertito che, quand' è $T' = t'$, è anche $\pm M = \pm m$; e quindi $A' = A\left(\frac{n \pm M}{n}\right)$, ed $a' = a\left(\frac{n \pm M}{n}\right)$; ed $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}$; dalla qual inavvertenza è

nato il suo sbaglio. E l'esempio stesso da lui recato par che avrebbe dovuto disingannarlo. In questo ei suppone $A=27$ pollici, $a=13\frac{1}{2}$, e $T'=t'=-3\frac{1}{2}$. Ciò posto, è $M=m=0{,}000843$. Dunque $A'=27(1+0{,}000843)$, ed $a'=13\frac{1}{2}(1+0{,}000843)$. Dunque $\frac{A'}{a'}=\frac{27}{13\frac{1}{2}}=\frac{A}{a}$; cioè le altezze vere son proporzionali alle apparenti.

Ecco alcuni esempj che basteranno a chiarir l'uso della formola $\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a}\left(1-(\frac{M-m}{n})(\frac{n-M}{n})\right)$ per la correzione delle altezze barometriche, quando la temperatura del mercurio è diversa alle due stazioni.

ESEMPIO I.

Sia $T'=+7$, e $t'=-5$. Si cerchin nella tavola i decimali delle due dilatazioni corrispondenti, e si troverà $M=1744$, ed $m=-1267$. Dunque

$(\frac{M-m}{n})=0{,}003011$, ed $\frac{n-M}{n}=0{,}998256$; ed infine

$(\frac{M-m}{n})(\frac{n-M}{n})=0{,}003011\times0{,}998256=0{,}003005748816$.

Di che ben si vede che negligentando il moltiplicatore $\frac{n-M}{n}$, la formola è $\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a}(1-0{,}003011)$; e tenendone conto, $\frac{A'}{a'}=\frac{A}{a}(1-0{,}003005748816)$ minore di 5

milionesime in circa. Se l' altezza del barometro inferiore foss' anche di 29 pollici, la differenza delle due correzioni sarebbe dunque di 145 milionesime di pollice, o 174 cento-millesime di linea, quantità di cui sarebbe inutile il tener conto nei calcoli delle altezze dei luoghi. E' vero che nel caso d' una livellazione esattissima, la differenza suddetta nell' altezza del barometro ne porterebbe una di circa un pollice e mezzo nell' altezza relativa delle stazioni, la qual non sarebbe da negligentarsi. Ma si osservi che in questo caso dovendo i barometri esser ad una piccola distanza orizzontale e ad altezze diverse fra loro di pochi piedi, anche la diversità di temperatura nei barometri non potrà esser considerabile. Nondimeno se per qualche caso straordinario questa differenza fosse di 5, o 6 gradi, allora anche il fattore $\frac{n-M}{n}$ dovrebbe farsi entrare nel calcolo.

ESEMPIO II.

Sia $T' = -2$, $t' = +4$, e per conseguenza il barometro superiore assai più caldo dell' inferiore, il che può accadere ben rare volte. In questo caso sarà

$M = -105$, ed $m = +1001$. Dunque $M - m = -1506$,

$n - M = 1,000505$; e calcolando con un fattor solo,

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 + 0,001506)$; coi due fattori,

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 + 0,0015067 6053)$, la cui differenza non giun-

ge ad 8 diecimilionesime dell' altezza del barometro inferiore.

Esempio III.

Sia $T' = +18$; $t' = +9$, e sarà $M = 4407$, $m = 2235$, $M - m = 2172$, ed $n - M = 0,995593$. Se calcoleremo con un fattor solo, avrem dunque $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 - 0,002172)$; ma con amendue $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}(1 - 0,002162427996)$. La differenza delle due correzioni anche in questo caso non giunge ad una centomillesima dell' altezza A. Rarissimi saran dunque i casi nei quali, anche volendo portar nel calcolo un' estrema esattezza, l' uso d' ambo i fattori sia necessario; e la formola di correzione sarà quasi sempre $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - \left(\frac{M - m}{n}\right)\right)$.

14. Che se amerem meglio servirci della dilatazione uniforme, prendendone la media 0,000236, avremo in tal caso $\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - \frac{236\,(T' - t')}{1000000}\right)$: e quindi

$$L\frac{A'}{a'} = L\frac{A}{a} + L\left(1000000 - 236\,(T' - t')\right) - L\,1000000,$$

Sia $T' - t' = 1$, e sarà $1000000 - 236(T' - t') = 999764$, il cui logaritmo è 5.9998975; e sottraendone il logaritmo d' un milione, resterà $L\frac{A'}{a'} = L\frac{A}{a} + 9.9998975$.

Sia $T' - t' = 6$, e quindi $236\ (T' - t') = 1416$, e $1000000 - 1416 = 998584$. Il logaritmo di questo numero è 5.9993846, dal quale detratto 6, resterà

$$L\frac{A'}{a'} = L\frac{A}{a} + 9.9993846.$$

Sia $T' - t' = -4$, e $-236\ (T' - t') = +944$. Sarà in questo caso $L(1000000 + 944) = 6.0004098$, e

$$L\frac{A'}{a'} = L\frac{A}{a} + 0.0004098.$$

Diamo successivamente a $T' - t'$ i valori $-6, -5, -4$ ec. fino a $+12$; e fatta in alcune delle ultime cifre la correzione d' un' unità, affinchè le differenze procedano regolarmente, ne avremo la tavola seguente che esprimerà i valori di $L[1000000 - 236(T' - t')] - 6$, e potrà per conseguenza applicarsi a tutt' i casi particolari, ne' quali è ben difficile che $T' - t'$ oltrepassi i limiti -6 e $+12$

$T' - t'$	$L\Big(1000000 - 236\ (T' - t')\Big) - 6$	
-6	0. 0006145	
		1023
-5	0. 0005122	
		1024
-4	0. 0004098	
		1024
-3	0. 0003074	
		1024
-2	0. 0002050	
		1025
-1	0. 0001025	

			1025
0	0.	0000000	
			1025
1	9.	9998975	
			1025
2	9.	9997950	
			1025
3	9.	9996925	
			1026
4	9.	9995899	
			1026
5	9.	9994873	
			1026
6	9.	9993847	
			1027
7	9.	9992820	
			1027
8	9.	9991793	
			1027
9	9.	9990766	
			1027
10	9.	9989739	
			1028
11	9.	9988711	
			1028
12	9.	9987683	

Per avere un esempio dell' uso di questa tavola, riprendiam quello del num. 12, nel quale è $T' - t' = 12$, $A = 348$ linee, ed $y = 248$. Sarà dunque $L\,(1000000 - 236 \times 12))-6 =$

$$
\begin{array}{rl}
 & 9 \,.\, 9987683 \\
L\frac{A}{y} = & 0 \,.\, 1471275 \\
\hline
Somma = & 0 \,.\, 1458958 \\
L\ som. = & 9 \,.\, 1640428 \\
L\ coef. = & 3 \,.\, 9657049 \\
\hline
L\,x = & 3 \,.\, 1297477 \\
x = & 1348 \,,\, 2
\end{array}
$$

Questo risultato è dunque maggiore d'una mezza tesa o di $\frac{3}{4}$ dei due già trovati al num. 12, differenze ben piccole per un'altezza sì grande.

Si osservin le differenze della tavola superiore, e si vedrà tosto quant'esse s'avvicinino alla differenza costante 1025. Chi non avesse alle mani la tavola, potrebbe dunque senz'alcun grave errore servirsi di questa differenza per calcolare il valore di

$L\left(\frac{1000000 - 236\ (T' - t')}{1000000}\right)$, il qual verrà ad essere

$10 - \frac{1025\ (T' - t')}{1000000}$ sostituendo 10 a zero per evitar le

caratteristiche negative. Eccone alcuni esempj.

Sia $T' - t' = +3$. Si moltiplichi 1025 per 3, e si avrà $\frac{1025\ (T' - t')}{1000000} = 0{,}0003075$ che sottratto da 10 darà 9.9996925, come nella tavola.

Sia $T'-t'=+8$. Sarà dunque $1025\times8=8200$, e

$\frac{1025\,(T'-t')}{1000000}=0,0008200$, che sottratto da 10 lascerà

9.9991800 maggiore di 7 dieci-milionesime di quel della tavola.

Sia $T'-t'=-4$; e sarà $-1025\times-4=+4100$, e

$-\frac{1025\,(T'-t')}{1000000}=0,0004100$ maggiore di due sole dieci-milionesime del numero della tavola. E qui giova osservare che quando $T'-t'$ è negativo, ma positivo per conseguenza $-1025\,(T'-t')$ non si ha alcun bisogno di cangiare in 10 la caratteristica o come si fa nel caso contrario per evitar le caratteristiche negative.

Sezione 4.

Effetti del calore nella densità e peso specifico dell' aria.

15. Già abbiam detto essere state da alcuni dottissimi Fisici determinate le leggi, giusta le quali anche l' aria si dilata o si condensa al variar della sua temperatura. Uno de' primi osservatori di queste dilatazioni e condensazioni dell' aria è stato l' inglese Hawksbee. Egli osservò che l' aria dal volume di parti 131 crebbe a quello di parti 144, passando il calore indicato dal suo termometro dal punto della congelazione a quello di gradi 130; e che discendendo questo al grado cinquantesimo sotto il punto del gelo, il volume dell' aria si restrinse a 126 parti. Non avendo però que-

sto Fisico indicato altro punto fisso del suo termometro fuor di quello della congelazione, ne rimane incerta la graduazione. Ma il sig. Demarest suo traduttore ed illustratore ha creduto poter con buone ragioni affermare, che il grado 130 del Fisico inglese, ch'ei crede esser quello del massimo caldo di Londra, corrisponde all' ottantesimo di Farheneit o 21 $\frac{1}{3}$ di Reaumur. Ammesso quest' altro punto fisso, la dilatazione dell' aria per gradi 21 $\frac{1}{3}$ sopra il ghiaccio sarebbe dunque di parti $144 - 131 = 13$; e quindi la dilatazione per ogni grado di Reaumur supposta equabile, di 0,60937. Ciò posto, il grado di Reaumur corrispondente a parti $131 - 126 = 5$ sarà $\frac{5}{0,60937} = 8,2$ sotto al ghiaccio. Chiamiamo 1 il volume dell' aria per la temperatura del ghiaccio; e ne avrem quello del grado 21 $\frac{1}{3}$, facendo la proporzione 131 a 144 come 1 al quarto; il qual sarà 1,09923. Questa è dunque la dilatazione per gradi 21 $\frac{1}{3}$; e questa divisa pel detto numero di gradi dà 0,004651 per grado $= \frac{1}{215}$ del volume primitivo 1 preso alla temperatura del ghiaccio. Il Muskembroek dice che i volumi dell' aria alle due temperature del ghiaccio e del massimo caldo di Londra, pel quale sembra intender egli pure il grado 130 del termometro di Hawksbee, sono per le osservazioni di questo Fisico nel rapporto di 6 a 7; ed aggiunge averli trovati anch'egli nello stesso rapporto in Olanda. Ma questo non è vero che ad un presso a poco ben largo; poichè il rapporto del Fisico inglese non è di 6 a 7, ma di 6 a 6,59.

16. Il sig. de Luc non ha fatta, a dir vero, alcuna esperienza diretta in questo proposito; ma la dilatazion

dell' aria per ogni grado di Reaumur si deduce agevolmente dalla sua formola per la misura delle altezze dei luoghi. Egli in fatti dalle sue numerosissime osservazioni fatte a 15 diverse stazioni sul monte Saleve vicin di Ginevra a temperature assai differenti, ha conchiuso che quando la media fra le temperature di due stazioni è di gradi 16,75 di Reaumur, si trova la distanza delle due stazioni moltiplicando per 10000 la differenza de' logaritmi delle due altezze corrette del mercurio nei barometri, vale a dire che chiamate queste A, a, è $x = 10000 L \frac{A}{a}$. Ma per le temperature maggiori di 16,75, egli ha osservato che questa formola dà le altezze troppo piccole e che bisogna accrescerle di $\frac{1}{215}$ per ogni grado di più dei 16,75, e della stessa quantità diminuirle quando la temperatura media è minore. Dalle sue osservazioni risulta dunque che chiamando 1 il volume dell' aria per la temperatura 16,75, questo cresce o cala di $\frac{1}{215}$ per ogni grado sopra o sotto la temperatura medesima. Dunque per la temperatura del ghiaccio il volume primitivo 1 si ridurrà ad $1 - 16,75 \times \frac{1}{215} = 1 - 0,779 = 0,9221$. Dunque considerando come primitiva la temperatura del ghiaccio, e chiamando per questa 1 il volume dell'aria, si troverà il volume pel grado 16,75, facendo la proporzione $0,9221 : 1 = 1 : 1,08448$. Dunque a 16,75 gradi corrisponde la dilatazione 0,08448; e questa divisa per 16,75 dà una dilatazione di 0,0050435 per ogni grado nella supposizione, che sia uniforme; quantità ben vicina a 50 diecimillesime e mezzo per grado. Ma si noti bene che questa dilatazione si riferisce al volume

primitivo 1 della temperatura del ghiaccio, laddove quella di $\frac{1}{215}$ =0,004651 suppone il volume primitivo alla temperatura 16,75. La conformità fra questa dilatazione e quella dell' Hawksbee è dunque illusoria, poichè si rapporta a due temperature assai diverse.

Il sig. de Luc nelle transazioni filosofiche di Londra, vol. 69, pag. 499 e seg. dice, che supposto = 1000 il volume dell'aria, quando il termometro di Farheneit è a 32 gradi, se il calor cresce di gradi 22,8, il volume, secondo l'abate de la Caille, il professor Mayer, il sig. Bonne, il cav. Shuckburg, ed il dottor Bradley, sarà 1040; 1046; 1047,7; 1050,5; 1054,4. Poi soggiunge che prendendo una media tra le dilatazioni che dalle sue numerose osservazioni risultano per lo stesso grado di caldo, si trova 1047 ben vicina alla media delle cinque poste qui sopra. Ma anche questa supposta conformità è illusoria, perchè la media delle sue osservazioni è relativa al grado 16,75 di Reaumur, non al 32 di Farheneit. Per questa temperatura ho dimostrato pur ora, che dalle osservazioni del de Luc risulta per ogni grado di Reaumur la dilatazione 0,0050435, la qual moltiplicata per 10,18 gradi di Reaumur corrispondenti a' 22,8 di Farheneit, dà la dilatazione 0,05134283. Quindi se il volume dell'aria è 1000 per lo zero di Reaumur, e' sarà un po' maggiore di 1051 per gradi 10,18, e non 1047.

17. Il sig. Hennert in una dissertazione che ottenne il premio dell' accademia di Gottinga ed ha per titolo = *Commentatio de altitudinum mensuratione ope barometri* = *Trajecti ad Rhenum* 1786, dice avere il Crucchio trovato co' suoi sperimenti fin dall'anno 1726,

che il volume dell' aria nel passar dalla temperatura del ghiaccio a quella dell'acqua bollente, si dilatò nel rapporto di 1070 a 1510. Ora 1070 è a 1510 come 1 ad 1,411215. Dunque la dilatazione fu di 0,411215 del volume primitivo dell'aria per l'intervallo di 180 gradi: e quindi per ogni grado fu $=0,002284$, o sia 0,005139 per ogni grado di Reaumur, la quale non supera quella del de Luc, che di 47 dieci-milionesime. Il sig. Hennert veramente alla pagina 9 della sua dissertazione fa ascender la dilatazione del Crucchio a 0,002444 per ogni grado di Farheneit, e non a 0,002284, come risulta dal mio calcolo. Ma si avverta ch' egli non suppone al grado 32 il principio delle dilatazioni, poichè a questo grado ei considera l' aria come già dilatata di $\frac{7}{100}$ del volume primitivo. Sembra quindi aver lui immaginato che negli sperimenti del Crucchio il volume primitivo fosse al grado *o* di Farheneit. Ma in questa supposizione le dilatazioni non sarebbero equabili; poichè sendo di $\frac{7}{100}$ la dilatazione per 32 gradi, quella di ogni grado fra *o* e 32 sarebbe non di 0,002444, ma di 0,002187. Supponendo che anche sotto il grado 32 le condensazioni siano di 0,002444 al grado, il volume primitivo 1 sarebbe al grado $32-28,6=3,4$. Ciò posto, si dovrebbe dire che quando il Crucchio cominciò i suoi sperimenti, il volume dell' aria da lui chiamato 1000 fosse alla temperatura di 3,4 di Farheneit, e che alzandosi poi questa a 32 e 212, i volumi fosser divenuti 1070 e 1510. Conchiudiam dunque che la dilatazione di 0,002444 al grado, suppone il volume primitivo non a 32 ma a 3,4 di Farheneit.

18. Il cav. Shuckburg avendo fatto passar l' aria

in quello strumento, che i Fisici chiaman *manometro*, per varii gradi di caldo, ha creduto poter conchiudere che l'aria per ogni grado di Farheneit sopra o sotto il ghiaccio si dilata o si condensa di 0,00243 del suo volume, e per conseguenza di 0,005467 per ogni grado di Reaumur. Il sig. Hennert paragonando questa dilatazione con quella del Crucchio, dice ch' è quasi la stessa, e ne conchiude, questo consenso dei due Fisici averlo indotto a calcolare e pubblicare nel suo opuscolo una tavola delle dilatazioni dell'aria, fondata sulla media espansione di 243 cento-millesime. Ma quì pure egli non s'è accorto che queste dilatazioni quasi eguali in apparenza, si riferiscono a diverse temperature primitive, quella dello Shuckburg a 32 gradi, e quella del Crucchio a 3,4. Noi in fatti nel num. prec. abbiam trovata la dilatazion del Crucchio non di 243, ma di 2284 cento-millesime, ove si riferisca, come quella di Shuckburg, alla temperatura del ghiaccio.

19. Il General Roy avendo fatto passare nello stesso tempo dalla temperatura zero di Farheneit a quella dell' acqua bollente o del grado 212 un termometro ed un manometro, osservò esattamente la corrispondenza delle dilatazioni loro, e trovò che ad eguali allungamenti del mercurio nel tubo del termometro corrispondevan nel manometro allungamenti dell' aria alquanto ineguali. In fatti, diviso in amendue gli strumenti l' intervallo intero dallo zero all' acqua bollente in 212 gradi, intendendo per questo nome 212 spazj solidi d' un' egual capacità, quando giunse il mercurio al grado 12, l' aria non giunse che a gradi 11,4; e salendo poi il mercurio equabilmente di 20 in 20 gra-

di, l' aria s' alzò anch'essa nel primo passo di 20; indi di 21,6; poi di 22,6 ec. come appare dalla tavola seguente.

Dilatazioni del mercurio nel termometro Gradi		*Dilatazioni dell'aria nel manometro* Gradi	
0		0,0	
	12		11,4
12		11,4	
	20		20,0
32		31,4	
	20		21,6
52		53,0	
	20		22,6
72		75,6	
	20		21,6
92		97,2	
	20		20,8
112		118,0	
	20		20,0
132		138,0	
	20		19,4
152		157,4	
	20		18,8
172		176,2	
	20		18,2
192		194,4	
	20		17,6
212		212,0	

Per aver ora anche le dilatazioni intermedie di 10 in 10 gradi, osservo che se la dilatazione pei primi 12 gradi fosse uniforme, quella dei soli due primi sarebbe di 1,9, e quella degli altri 10 di 9,5. Ma poichè le dilatazioni successive dell'aria fino a quella che cor-

risponde al grado 72 del mercurio, son tutte crescenti, ridurrem quella dei primi due gradi ad 1,8, onde quella degli altri 10 sarà di 9,6. Continuando per simil guisa l'interpolazione, farem la dilatazione dai 12 ai 22 gradi, di 9, 8; dai 22 ai 32, di 10, 2 ec. come nella tavola seguente.

Gradi del termometro.	*Gradi del manometro.*	
0	0	
		1, 8
2	1, 8	
		9, 6
12	11, 4	
		9, 8
22	21, 2	
		10, 2
32	31, 4	
		10, 6
42	42, 0	
		11, 0
52	53, 0	
		11, 4
62	64, 4	
		11, 2
72	75, 6	
		11, 0
82	86, 6	
		10, 6
92	97, 2	

Sarebbe inutile il prolungar questa tavola, perchè a temperature più alte non accaderà mai di far le livellazioni barometriche.

Determinata per tal modo la corrispondenza fra le dilatazioni del mercurio nel termometro e dell' aria nel manometro, il General Roy si fece a cercare di quan-

to precisamente il volume dell' aria si dilati nel passare dalla temperatura zero di Farheneit a quella di 212 gradi; e per mezzo d' un gran numero d' esperienze fatte con arie di varia densità rinchiuse nei manometri, gli riuscì finalmente di determinarlo. Noi però, lasciate da parte le dilatazioni delle arie d' una densità assai diversa dalla comune dell' atmosfera, ci ristringeremo a riferire i risultati di nove sperimenti fatti con un' aria compressa da un peso medio dell' atmosfera corrispondente a 30, 02 pollici inglesi che equivalgono a 28 e quasi $\frac{1}{4}$ pollici francesi di mercurio nel barometro. Ove è da osservarsi che dagli altri esperimenti risulta non variar le leggi della dilatazion dell' aria al variar di sua densità, se le differenze di questa non son molto grandi e maggiori d' assai di quelle che posson aver luogo dalle più basse alle più alte regioni dell' aria, nelle quali si fanno le barometriche osservazioni. Dai nove sperimenti del General Roy si raccoglie adunque che la dilatazion media del volume dell' aria rinchiusa nel manometro fu di 48421 cento-millesime parti del suo volume primitivo, nel passar ch' ella fece dalla temperatura zero a quella del grado 212, cosicchè, chiamato 1 il volume al grado zero, questo divien 1,48421 al grado 212.

Or ciò posto, chi non vede con quale e quanta agevolezza si potran determinare le dilatazioni per tutti i gradi intermedii? Cercate voi per esempio qual sia la dilatazione pel grado 12 di Farheneit? Osservate primieramente che al grado 12 del termometro corrisponde nel manometro il grado 11,4, come si vede nella tavola posta qui sopra; e poi dite: se la dilata-

zione per gradi 212 è 0,48421, per gradi 11,4 di quanto sarà? Fatta la proporzione, troverete esser dessa 0,026038. E medesimamente per aver la dilatazione del grado 22, avrete la proporzione 212:0,48421=21,2 al quarto, che sarà 0,048421. E la dilatazione pel grado 32 sarà $\frac{0,48421 \times 31,4}{212} = 0,071718$. Si continui nel modo medesimo il calcolo di 10 in 10 gradi fino al 92, oltre il quale non si va mai nelle livellazioni barometriche; e se ne avrà la tavola seguente

Gradi del termometro.	*Volumi dell' aria.*
0	1,000000
12	1,026038
22	1,048421
32	1,071718
42	1,095929
52	1,121053
62	1,147090
72	1,172671
82	1,197795
92	1,222006

Per adattar anche questa al termometro di Reaumur, cominceremo dal chiamar 1 il volume dell' aria al grado zero di questo termometro o sia 32 dell'altro; il che vuol dire che al volume 1,071718 si sostituisce

il volume 1. Per aver dunque in questa supposizione anche i volumi degli altri gradi della tavola precedente, convien dire: come 1,071718 ad 1, così il volume del dato grado a quel che si cerca. Si faccian queti semplicissimi calcoli, e se n' avrà quest' altra tavola.

Gradi del termometro.	*Volumi dell' aria.*
0	0,9331
12	0,9574
22	0,9782
32	1,0000
42	1,0226
52	1,0460
62	1,0703
72	1,0942
82	1,1176
92	1,1402

Finalmente col metodo esposto alla fine del num. 11 si applicherà questa tavola ad una serie di gradi di Reaumur procedente di 5 in 5 gradi, e ne risulterà la seguente.

Gradi del termometro.	*Volumi dell' aria.*
— 15	0,9295
— 10	0,9521
— 5	0,9755

0	1 , 0000
5	1 , 0254
10	1 , 0517
15	1 , 0791
20	1 , 1060
25	1 , 1323
30	1 , 1576

Per aver le dilatazioni anche di grado in grado dal − 15 al + 30, basterà fare ai numeri della tavola precedente l' interpolazione opportuna; e con questo mezzo io ho calcolata quella che si trova in fine di questa memoria.

20. Benchè dall' ispezione di questa tavola chiaramente apparisca non essere uniformi le dilatazioni dell' aria, si vede però che le variazioni non son grandi, e che poca alterazione s' introdurrebbe nel calcolo delle livellazioni barometriche, considerandole come uniformi. La dilatazione pel grado + 25 è 0, 1323; e la condensazione pel grado − 10 è 0,0479. La dilatazion totale per quest' intervallo, oltre il quale rarissime volte si stenderanno le differenze dei calori nelle due stazioni, di cui s' ha a determinare la distanza verticale, sarà dunque 0,1802; e questa distribuita in 35 gradi darà 0,005149 per grado. La differenza media sarebbe dunque alquanto minore di 51 $\frac{1}{2}$ dieci-millesime, e non molto diversa dalla minima che nella tavola corrisponde al grado − 10, e dalla massima che nel detto intervallo si trova al grado + 15. La dilatazione per que-

sto grado è nella tavola 0,0791; e per la dilatazion media anzidetta $15 \times 0,005149 = 0,077235$, la cui differenza da quella della tavola non giunge a 19 diecimillesime. Questa, a dir vero, sarebbe maggiore pel grado -10, anch' essa però non guari considerabile; poichè sarebbe alquanto minore di 359 cento-millesime. Questa medesima dilatazion media non si scosta molto neppure dalle due del de Luc e del Crucchio; e la media delle tre viene ad essere 0,0051105; cioè ben poco più di 51 diecimillesime. Di questa dunque potrebbe far uso chi non avesse alle mani la tavola calcolata cogli esperimenti del General Roy, la qual però merita per ogni riguardo la preferenza.

Sezione 5.

Della variabilità del calore ad altezze diverse nell' atmosfera.

21. Se il calore nell'atmosfera non variasse dal basso all' alto; ma ogni colonna d' aria avesse in tutta la sua lunghezza la temperatura medesima, che ha alla base, la formola $x = 9240,7\, L\, \frac{A}{y}$ del num. 5 potrebbe facilmente applicarsi a qualunque altra temperatura. Imperocchè se $+\ T$ sarà il grado del termometro esposto all' aria nella stazion inferiore, la lunghezza della colonna aerea, che per la temperatura del ghiaccio è $= 9240,7\, L\, \frac{A}{y}$, di tanto si dovrà accrescere, di quanto l' aria si dilata nel passare dalla temperatura di ze-

ro a quella di T, la qual dilatazione che si trova coi metodi della sezion precedente, si può esprimere per C. Sarà dunque $x = 9240,7\, CL\,\frac{A}{y}$; e $Lx = L(LA - Ly) + LC + L\,9240,7$. Eccone alcuni esempj.

Sia $A = 336$ lin., $y = 335$, e $T = -10$. Ciò posto, sarà $LA = 2.5263393$; $Ly = 2.5250448$; e $C = 0,9525$. Dunque $LA - Ly$, o sia la differenza de' logaritmi $= 0.0012945$; e quindi

$$\begin{aligned} L\,Diff. &= 7\,.\,1111021 \\ L\,C &= 9\,.\,9787738 \\ L\,Coeff. &= 3\,.\,9657049 \\ \hline L\,x &= 1\,.\,0555808 \end{aligned}$$

A questo logaritmo corrisponde il numero $x = 11,3653$: il che vuol dire che quando il barometro è a 28 pollici d' altezza vera, cioè ridotta col metodo della sezione 3ª. alla temperatura del ghiaccio, e l' aria posta fra le due stazioni alla temperatura uniforme del grado -10, ad una linea di differenza nell' altezza dei barometri corrispondono 11,3653 tese d' aria o piedi 68,19.

Sia $A = 264$ lin., $y = 263$, $T = +12$, e $C = 1,0627$. Sostituiti questi valori, avremo

$$\begin{aligned} L\,Diff. &= 7\,.\,2160099 \\ L\,C &= 0\,.\,0264107 \\ L\,Coeff. &= 3\,.\,9657049 \\ \hline L\,x &= 1\,.\,2081255 \end{aligned}$$

; ed $x = 16,1482$ tese, o 96,889 piedi.

Amendue questi casi posson verificarsi: il primo ne' luoghi poco superiori al livello del mare in un rigido inverno; l' altro in estate sopra un' alta montagna, come presso l' ospizio dei cappuccini sul s. Gottardo. Da questi esempj si fa manifesto che la differenza d' una linea di mercurio per la temperatura costante del ghiaccio può corrispondere a colonne d' aria d' una lunghezza molto diversa, e che questo e non altro si dee rispondere ai molti che domandano a qual altezza s' abbia a salire, affinchè il mercurio s' abbassi d' una linea nel barometro.

22. Ma anche quest' eguaglianza supposta di temperatura ad altezze sensibilmente diverse nell' atmosfera, non hà luogo in natura. Le numerose osservazioni fatte da varii Fisici all' occasione delle livellazioni barometriche s' accordan anzi tutte a stabilir che il calore va dal basso all' alto scemando nell' atmosfera. Ma se questa diminuzione sia regolare, ed essendolo, con qual legge si faccia, non si può conchiudere dalle osservazioni anzidette. Nè ciò dee recar meraviglia a chi rifletta che, toltone qualche rarissimo caso in cui gli osservatori si son alzati nell' atmosfera col globo areostatico, il calor trovato nelle stazioni superiori non si deve confonder con quello dell' aria libera posta verticalmente alla medesima altezza sopra la stazione inferiore: poichè nei luoghi delle suddette stazioni la temperatura dell' aria conveniente all' altezza è necessariamente alterata dal riverbero e dal diverso calore dei luoghi e dei corpi vicini; il che non accade nell' aria libera ove ne sia sensibilmente distante. Di qui è che quand' anche dalle osservazioni si raccogliesse alcuna leg-

ge della successiva diminuzion del calore sul dorso delle montagne ove si son fatte, non potrebbe questa senza molta incertezza applicarsi alla colonna d' aria che s'alza a perpendicolo sopra la stazione inferiore. A questo s' aggiunga non essersi fatte nè potersi fare dagli uomini sì fatte osservazioni, fuorchè ad altezze assai piccole e nelle quali non può per conseguente aver luogo una gran differenza di temperatura. In fatti le massime altezze in cui siensi fatte osservazioni, son quelle del Canigou nelle Cordilliere del Perù, e del Monte-bianco in Europa; la prima di 2470 tese sopra il livello del mare, per quanto ne dice il sig. de la Condamine; e la seconda di 2435, prendendo la media fra le due misure geometriche del cavalier Shuckburg e del sig. Pictet, e supposta di 188 tese l' altezza del lago di Ginevra sopra il livello del mare. Or la differenza di temperatura fra la spiaggia del mare, e la cima del Monbianco non giunge tutt' al più che a 25 gradi o 26 del termometro di Reaumur, di che abbiamo una prova nelle osservazioni contemporanee fatte dal sig. de Saussure alla cima del monte, e Senebier a Ginevra ai 3 Agosto 1787, delle quali avrò altrove occasion di parlare. Da queste risulta che mentre il termometro era a Ginevra a gradi 22,6, fu alla cima del Mon-bianco a gradi $-2,3$. La differenza fu dunque di gradi 24,9; onde supposta la temperatura alla riva del mare, d'un grado ed $\frac{1}{10}$ maggiore che a Ginevra, la differenza dei termometri per un' altezza di 2435 tese sarebbe di 26 gradi. Si osservi ora che il calore pel grado 22,6 è secondo la nostra tavola 1,1195, laddove pel grado $-2,3$ è 0,9886, e che la differenza loro è 0,1309.

Qualunque sia la legge della diminuzion del calore, non potrà dunque in verun punto dell' altezza aversi una differenza di calore, che oltrepassi i 13 centesimi del calor 1, ossia del ghiaccio. Di qui è che prendendo un medio fra i calori delle due stazioni, il quale nel caso nostro è 1,05405, e considerandolo come costante, la sua differenza dal calor corrispondente a qualunque ipotesi di variabilità per qualunque altezza inferiore alla cima del monte, non giungerà mai precisamente ad 1,05405 — 0,9886, cioè a 0,06545; e sarà quindi minore di 7 centesimi del calor 1. Ma di questo mi riserbo a parlar più distesamente ove tratterò della differenza dei risultati, che le ipotesi del calor variabile, e del calor medio costante producon nel calcolo delle altezze dei luoghi.

23. Passiam ora alla considerazione di alcune ipotesi intorno alla diminuzion del calore dal basso all'alto, e scegliam fra queste le due più semplici, quelle cioè del calor decrescente in ragione *aritmetica*, ed *armonica* delle altezze; e cominciamo dall'aritmetica. Sia C il calore alla stazione inferiore; ed ascendendo alle altezze 1, 2, 3, 4 ec. si riduca esso a $C-m$, $C-2m$, $C-3m$, $C-4m$ ec. Ciò posto, è cosa chiara che ad un'altezza indeterminata x corrisponderà un calore $=C-mx$; la qual formola si riduce come deve, a C, ponendo $x=0$. Se anche il calore della stazion superiore sarà noto, e si chiamerà c, ne risulterà dunque $C-mx=c$, e per conseguenza $m=\frac{C-c}{x}$. Avendo il sig. de Luc in diverse stagioni osservati i gradi del termometro al basso e all'alto delle medesime stazioni, per le quali gli eran

note le altezze x, si può dalle sue osservazioni raccogliere il valor di m, poichè in esse son note le quantità C, c, ed x. Ma per le ragioni di sopra accennate questi valori sono incostantissimi e molto diversi un dall' altro. Io ne prenderò per esempio alcune dell' osservazioni fatte alla stazion quindicesima, la cui altezza maggiore di tutte l'altre è di tese 487,77; e per averle a tutte le temperature, sceglierò le due prime, le due ultime, e due di mezzo. Nell' osservazion prima fu $T=10,5$, e $t=4,5$ esprimendo al solito per T i gradi del termometro inferiore, e per t quei del superiore. Fu dunque $C=1,0546$; $c=1,0229$; e $C-c=0,0317$. Ciò posto, abbiamo $m=\frac{0,0317}{487,77}$, e $Lm=L0,0317-L487,77=5.8128442$. In questo caso la caratteristica è propriamente -5, onde segue esser $m=0,00006499$. Nell' osservazion seconda fu $T=9$; $t=8$, $C=1,0465$, $c=1,0412$, e $C-c=0,0053$. Con questi dati si trova $Lm=5.0360608$, ed $m=0,00001087$. La sesta osservazione diede $T=17$, $t=14\frac{1}{2}$, $C=1,0900$, $c=1,0745$, ed $m=0,00003178$. Finalmente dalla settima, e dall'ultime due che son la decima ed undecima, risultano per m i tre seguenti valori 0,00003834; 0,00007893; 0,00007934. La varietà e l' incostanza di questi valori è ben grande; ma si può nondimeno prenderne un medio, il qual vien ad essere 0,00005071.

In quest' incertezza ho creduto necessario il ricorrere ad osservazioni fatte sulla cima di monti o isolati o superiori almeno a tutti quelli che han d' intorno; perchè il calore quivi osservato non dev' esser soggetto alle già menzionate irregolarità, e quindi accostarsi assai

più a quello dell' aria libera posta verticalmente alla medesim' altezza sopra la stazione inferiore. A questo fine ho scelto tre monti posti nel centro, verso il mezzo, e ad una delle estremità della vicina catena dell' alpi. Il primo è il Mon-bianco; il secondo il Legnone o Lineone situato all' estremità settentrionale del lago di Como; e l'ultimo il monte Generoso posto fra i due laghi di Como, e Lugano sopra la valle Intelvi.

L' altezza del Mon-bianco sopra il lago di Ginevra è, giusta la misura geometrica del cavalier Shuckburg, di tese 2257, ma di sole 2238 secondo quella del sig. Pictet. La media delle due è dunque di tese 2247,5. Nel num. prec. ho parlato d' un'osservazione fatta nello stesso tempo dal sig. de Saussure alla cima di quel monte, e dal sig. Senebier a Ginevra. L' osservatorio di quest' ultimo è di 13 tese superiore al lago; e quindi la distanza verticale dei livelli delle due stazioni si riduce a tese 2234,5. Ora in quest' osservazione fu $T=22,6$; $t=-2,5$. Ma convien avvertire che l' aria della cima del monte essendo al contatto d' un ammasso immenso di nevi e ghiacci perpetui, dev' esser più fredda di quella che sta sopra Ginevra alla medesima altezza. A me non par dunque verosimile che il valor di t fosse minor di -1. Ciò posto, i due calori saranno stati $C=1,1198$; $c=0,9950$; e $C-c=0,1248$; dai quali valori risulta

$$m=\frac{0,1248}{2234,5}=0,00005585.$$

Nella mattina del primo d' agosto 1780 il P. Pini osservò sulla cima del Legnone il termometro a gradi 11 $\frac{1}{4}$; e nella stessa mattina il termometro fu a Brera

in Milano a gradi 23. Per le misure geometriche dell' Abate Oriani la distanza verticale dei livelli di queste due stazioni è di tese 1280,7. Si faccia il calcolo con questi dati, e si troverà $m = 0,00004966$.

Anche l' altezza del monte Generoso è stata, come vedrem poi, misurata geometricamente dallo stesso Abate Oriani, e trovata di tese 769 superiore al lago di Como. Nelle osservazioni barometriche corrispondenti fatte da lui e da me contemporaneamente, abbiamo avuto $T = 19\frac{1}{4}$, $t = 14$, $C = 1,1046$, e $c = 1,0736$. Or da questi dati risulta $m = 0,00004031$. La somma dei trè risultati è dunque 0,00014582. A questa aggiugniam la somma de' sei, tratti dalle osservazioni del de Luc, la qual è 0,00030425, e ne avremo 0,00045005. Dividiam finalmente questo numero per 9, cioè per quello delle osservazioni; e troveremo il valor medio di $m = 0,00005001$, o negligentando una cento-milionesima, 0,00005.

Per quest' ultimo risultato delle osservazioni sembra dunque che la diminuzion del calore sia di cinque cento-millesime per tesa, o di cinque millesime per 100 tese. E poichè, pel num. 20, nella supposizione delle condensazioni e dilatazioni dell' aria uniformi ad ogni diminuzione d' un grado del termometro di Reaumur corrispondon poco più di 5 millesime nella condensazion dell' aria o diminuzion del calore, si può dire che il medio abbassamento d' un termometro di Reaumur alzato verticalmente nell' aria, è presso a poco di un grado per ogni centinajo di tese. Così nell' osservazion del Mon-bianco, cioè in quella della massima altezza cui siasi trasportato il termometro in Europa, per 22°,

345 centinaja di tese si ebber nel termometro quasi 25 gradi d' abbassamento; i quali però per l' altezza verticale sopra la stazion di Ginevra posson ridursi a 23,6. Nell' osservazion del Legnone la distanza verticale dei due termometri fu di 12,807 centinaja di tese, e quella de' lor gradi, 11,875. Ma in quella del monte Generoso a 7,69 centinaja di tese non corrisposero che gradi 5,75.

Per sapere a qual altezza dell' atmosfera il calor dell' aria secondo questa legge sia ridotto a metà, basta metter $\frac{C}{2}$ in luogo di c nell' equazione $C-0,00005\,x=c$; e si avrà $x=\frac{C}{2\times 0,00005}=10000\,C$. Si osservi che C è espresso nella tavola dei volumi dell' aria in diecimillesime, e si vedrà tosto, che l' altezza cercata è quella del valor di C preso in numeri intieri. Per la temperatura del ghiaccio alla superficie terrestre, il calor dell' aria sarebbe dunque ridotto a metà all' altezza di 10000 tese: per la temperatura di gradi 25 l' altezza sarebbe di tese 11318, e di 9123 pel grado -10.

24. Ma se la diminuzion del calore segue la ragione armonica delle altezze crescenti, chiamato C, come dianzi, il calore alla stazion inferiore, questo coll' ascender successivamente alle altezze 1,2,3,4, ec. si ridurrà a $\frac{C}{1+m}$, $\frac{C}{1+2m}$, $\frac{C}{1+3m}$ ec. ond' è che ad un' altezza indeterminata x corrisponderà il calore $\frac{C}{1+mx}$;

la qual formola deve ridursi e si riduce di fatti a C quando è $x=o$; il che non sarebbe, se il denominatore non avesse per primo termine l'unità. Esprimendo dunque per c il calore d' un' altezza indeterminata x, la formola pel calor decrescente in progressione armonica sarà $c = \frac{C}{1 + m x}$ già data dal sig. Eulero nelle memorie di Berlino per l'anno 1754. Per determinare il valor di m avrem quindi l' equazione $m = \frac{C - c}{c x}$.

Si applichin a questa le sei osservazioni del sig. de Luc, e si troveranno i sei valori seguenti di m

o , 000063535

o , 000010436

o , 000029574

o , 000035377

o , 000072580

o , 000072314

E similmente per le tre osservazioni dei monti Bianco, Legnone, e Generoso avremo per m questi altri valori.

o , 000051634

o , 000046938

o , 000037532

La somma dei 9 valori è dunque 0,00041992, ed il va-

lor medio 0,00004666. Se nell' equazione $c = \frac{C}{1 + mx}$

faremo $c = \frac{C}{2}$, troveremo $x = \frac{1}{m} = \frac{100000000}{4666} = 21432$;

vale a dire che l'altezza alla quale il calore si riduce alla metà in quest' ipotesi, è di tese 21432 per qualsivoglia calore della stazion inferiore. Il sig. Abate Oriani servendosi d'altre osservazioni, ha trovato il valor medio di $m = 0,000036$; e ne ha conchiuso che l' altezza a cui c è $= \frac{C}{2}$, è di tese 27778 maggior della precedente quasi di un terzo. Vedi il suo eccellente opuscolo sulle rifrazioni astronomiche nelle effemeridi di Milano per l' anno 1788.

Sezione 6.

Nuove formole per la misura delle altezze relative alle due ipotesi del calor decrescente in progressione aritmetica, ed armonica.

25. Cerchiam finalmente una formola per le livellazioni barometriche, la qual possa applicarsi a qualunque ipotesi del calor decrescente dal basso all' alto dell' atmosfera. A questo fine supponiamo che ad un' altezza x corrisponda un calore espresso da una funzione dell' altezza medesima, che chiameremo X. Sia di nuovo, come nel num. 2, la densità del mercurio alla temperatura del ghiaccio $= 1$, ed $\frac{1}{D}$ quella dell'aria, che abbia la medesima temperatura, e sia com-

pressa da un peso espresso dall' altezza A' del mercurio nel barometro. Sia y l' altezza di questo alla stazion superiore, ove il calore è espresso da X funzione di x distanza verticale delle stazioni. Per avere la densità dell' aria all' altezza x, osservo che, pel numero 7, saranno le altezze del mercurio nei barometri in ragion composta delle densità e dei calori dell' aria, cioè $A':y = \frac{1}{D} : \frac{X}{\delta}$. Avrem dunque $\frac{1}{\delta} = \frac{y}{A'DX}$, e quindi il peso dello strato d' aria, la cui altezza è dx, sarà $= \frac{y\,dx}{A'DX}$; il qual dovrà esser uguale a $-dy.1$. Sarà dunque $-dy = \frac{-y\,dx}{A'DX}$, e $\frac{dx}{X} = \frac{-A'D\,dy}{y} = \frac{-B\,dy}{y}$, ponendo per semplicità maggiore B in luogo di $A'D$. L' integrale di quest' equazione $S.X^{-1}\,dx = -Bly + Cost.$ dipende, come ognun vede, dalla funzione X del calore, e sarà diverso secondo la diversità di questa funzione.

Or nell' ipotesi del calor decrescente in progressione aritmetica, X è $= C - mx$; e questo valore sostituito nell' equazione $\frac{dx}{X} = -\frac{B\,dy}{y}$ la cangia in $\frac{dx}{C-mx} = -\frac{B\,dy}{y}$, o $\frac{-dx}{C-mx} = \frac{B\,dy}{y}$. L' integrale d' amendue i membri di quest' equazione dipende dai logaritmi iperbolici, ed è $\frac{1}{m}\,l\,[C-mx] = Bly + Cost.$

La costante sarà dunque $\frac{1}{m} l\,[C - m x] - B\,l y$; ove y è $= A$, quando $x = o$; poichè A esprime al solito l'altezza del barometro alla stazion inferiore dove x è $= o$.

La costante è dunque $\frac{1}{m} lC - B l A = \frac{l C - m B l A}{m}$.

L' equazion completa diviene per conseguente

$\frac{1}{m} l\,[C - m x] = \frac{m B l y + l C - m B l A}{m}$; o sia $l\,[C - m x]$

$= - m B\,(l A - l y) + l C = - m B l\,(\frac{A}{y}) + l C$. Si passi ora dai logaritmi ai numeri; e si avrà

$C - m x = \frac{C}{(\frac{A}{y})^{m B}} = \frac{C\,y^{m B}}{A^{m B}}$; e finalmente

$$x = \frac{C}{m}\left(1 - \frac{y^{m B}}{A^{m B}}\right) = \frac{C}{m}\left(\frac{A^{m B} - y^{m B}}{A^{m B}}\right).$$

26. Si osservi ora, che il nostro coefficiente $9240,7$ è $= D A' l\,10 = B l\,10$. Sarà dunque $B l\,10 = 9240,7$, e $B = \frac{9240,7}{l\,10} = 4013,2$. E poichè m è in quest'ipotesi $= 0,00005$ pel num. 23, avremo $m B =$ $4013,2 \times 0,00005 = 0,20066$. Ed ecco che la formola $x = \frac{C}{m}\left(1 - (\frac{y}{A})^{m B}\right)$ diverrà $x = \frac{100000}{5} C\left(1 - (\frac{y}{A})^{0,20066}\right)$

$= 20000\,C\left(1 - \left(\frac{y}{A}\right)^{0,20066}\right)$, ove le 66 centomillesime dell' esponente si posson negligentare senz' alcun sensibile errore. Ciò fatto, si trova

$$x = 20000\,C\left(1 - \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{5}}\right) = 20000\,C\left(\frac{A^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{5}}}{A^{\frac{1}{5}}}\right).$$

E qui giova osservare che i valori di C sendo espressi da diecimillesime, considerandoli come intieri, ne avremo $x = 2\,C\left(\frac{A^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{5}}}{A^{\frac{1}{5}}}\right)$.

Quando da prima m' incontrai in questa formola, non posso negare ch' ella per l' estrema sua semplicità non mi soddisfacesse. Ma più ancora mi piacque, quando nell' applicarla alle osservazioni barometriche, non la trovai inferiore alle altre anche per l' esattezza de' risultati. Per darne fin d' ora qualche saggio, ne farò l' applicazione alla misura di tre altezze, una assai piccola, l' altra mezzana, e massima la terza.

Il campanile della chiesa parrocchial di Domaso, borgo situato all' estremità settentrionale del lago di Como, misurato ben esattamente con una funicella, si trovò esser alto piedi 80, 149 dal suo piede al piano delle campane. Nel giorno 4 febbrajo del 1800, fatte le osservazioni barometriche nelle due mentovate stazioni, ebbi $A = 333,33$; $T' = 7^\circ \frac{1}{3}$; $T = 6$; $y = 332,175$; e $t' = 6^\circ \frac{1}{3}$. Or da questi dati risulta $C = 1,0306$; $M = 1805$; $m = 1578$; ed $M - m = 247$. Corretta l' altezza del barometro inferiore, si ha $A' = 333,25$. Sarà dunque

$LA' = 2.5227702$; e $Ly = 2.5213670$. Per trovar i valori di $(A')^{\frac{1}{5}}$, $y^{\frac{1}{5}}$, se ne dividan per 5 i logaritmi, o, ciò ch' è lo stesso, si raddoppino i lor decimi; e si avrà $\frac{1}{5} LA' = 0.5045540$, ed $\frac{1}{5} Ly = 0.5042740$. Presi i numeri corrispondenti a questi logaritmi, sarà dunque $A^{\frac{1}{5}} = 3,19561$; $y^{\frac{1}{5}} = 3,19355$, e per conseguenza

$$\frac{(A')^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{5}}}{(A')^{\frac{1}{5}}} = \frac{0,00206}{3,19561}.$$

Ciò posto, avremo

$$L\frac{0,00206}{3,19561} = 6.8093134$$

$$L\,10306 = 4.0130901$$

$$L\,2 = 0.3010300$$

$$Lx = 1.1234335$$

$$x = 13,2872^{\text{te.}} = 79,723^{\text{pie.}}$$

L' altezza calcolata è dunque minor della vera di $\frac{426}{1000}$ di piede, o sia di pollici 5, lin. 1 $\frac{1}{3}$.

L' altezza mezzana sia la stazion XV^{a} del sig. de Luc di piedi 2926 $\frac{2}{3}$. Nell' osservazion prima di questa stazione fu $A = 5208$ sedicesimi di linea; $y = 4626$; $T' = 9,1$; $t' = 5$, e $T = 10\frac{1}{2}$. Ciò posto, abbiamo $M = 2259$; $m = 1249$; $M - m = 1010$; $A' = 5202,74$; e $C = 1,0544$. Si faccia il calcolo con questi dati, e si troverà $(A')^{\frac{1}{5}} = 5,5366$; $y^{\frac{1}{5}} = 5,40815$; e la lor differenza $= 0,12845$. Prendiam ora i logaritmi, ed avremo

$$L\,\frac{0,12845}{5,53660} = 8\,.\,3654910$$

$$L\,10544 = 4\,.\,0230054$$

$$L\,2 = 0\,.\,3010300$$

$$L\,x = 2\,.\,6895264$$

$$x = 489,2415$$

L' altezza calcolata supera dunque la vera di 1te, 467 su 487, 78, o sia di $\frac{3}{1000}$.

La massima altezza sia finalmente quella della cima del Mon-bianco, cioè di tese 2247, 5 sopra il lago di Ginevra. Per le osservazioni corrispondenti fatte nel giorno altrove indicato alla cima di quel monte e a Ginevra, si ebbe $A' = 326,68$; $y = 192,9$; $T' = t'$; $T = 22,6$; e $C = 1,1198$. Fatto il solito calcolo, troverem dunque $(A')^{\frac{1}{5}} = 3,1829$; $y^{\frac{1}{5}} = 2,8646$, e la lor differenza 0, 3183. Con questi dati si trova

$$L\,\frac{0,3183}{3,1829} = 9\,.\,0000136$$

$$L\,11198 = 4\,.\,0491405$$

$$L\,2 = 0\,.\,3010300$$

$$L\,x = 3\,.\,3501841$$

$$x = 2239,667$$

A quest' altezza debbon aggiugnersi 13 tese, delle quali l' osservatorio del sig. Senebier fu superiore al

livello del lago, e si troverà l'altezza calcolata della stazion superiore di tese 2292,667 sopra il livello del lago. La media fra le due misure geometriche è di tese 2247, perchè la stazion superiore fu d'una mezza tesa inferiore alla cima del monte. Dunque la misura barometrica supera la media delle geometriche di 5te, 667, o di 2 millesime e $\frac{1}{2}$ dell'altezza totale. Io confesso però, che in tanta distanza orizzontale delle due stazioni, questa precision così grande è probabilmente più l'effetto del caso, che dell' esattezza della formola colla quale s'è calcolata l'altezza. Per un'altra osservazion contemporanea fatta dal figlio del sig. de Saussure al Priorato di Chamouni, l'altezza della cima del Mon-bianco sopra il Priorato, calcolata, come spiegherò altrove, con questa formola, è di tese 1900,174: e quella del Priorato sopra il lago, di 329,09. L'altezza del monte sopra il lago, vien dunque ad essere di tese 2242,764; e quindi minore dell' altra posta qui sopra un po' meno di tese 10 $\frac{1}{4}$. A me par veramente cosa assai singolare, che, ove la differenza fra le misure geometriche è di 19 tese, quella che risulta dalle due barometriche, sia poco più di 10, e per conseguenza della metà. E più ancora ne stupisco, osservando che la media fra le misure barometriche è = 2247te, 865, e supera la media delle geometriche poco più d'un terzo di tesa. *(a)*

(a) Se si volesse far uso del coefficiente del cavalier Shuckburg posto in fine del num. 4°, si troverebbe $m\,B = 0,206489653o$, per agevolare senza error sensibile i calcoli, $= 0,2065$. La formola sarebbe dunque

$$x = 2\,C\,\frac{\left((A')^{0,2065} - y^{0,2065}\right)}{(A')^{0,2065}}$$

27. Vediam ora qual formola corrisponda all' ipotesi del calor decrescente in progressione armonica delle altezze. In questa la funzione X è $= \frac{C}{1 + m x}$; e questo valore sostituito nella formola $\frac{dx}{X} = -\frac{B\,dy}{y}$ la cangia in $\frac{(1 + m x)\,dx}{C} = -\frac{B\,dy}{y}$; il cui integrale è $\frac{m x^2}{2} + x = -\,B\,C\,l\,y + Cost.$ Ora, poichè y è $= A$ quand' è $x = o$, la costante sarà $B\,C\,l\,A$. Dunque l' equazion completa è $\frac{m x^2}{2} + x = B\,C\,l\,A - B\,C\,l\,y = B\,C\,l\left(\frac{A}{y}\right)$;

Calcoliam con questa le due precedenti altezze del monte Saleve e del Mon-bianco. Nella prima avremo $(A')^{0,2065} = 5,8533$; $y^{0,2065} = 5,713$; e la lor differenza $0,1403$. Sarà dunque

$$L\,\frac{0,1403}{5,8533} = 8\,.\,3796569$$

$$L\,10544 = 4\,.\,0230054$$

$$L\,2 = 0\,.\,3010300$$

$$L\,x = 2\,.\,7036923$$

$$x = 505,47$$

L' altezza calcolata con questo coefficiente supera dunque la vera di tese 17,69, o sia di $\frac{36}{1000}$ dell' altezza totale; ch' è alquanto più del 3 e $\frac{1}{2}$ per 100.

Si faccia un simil calcolo pel Mon-bianco, e si troverà $L\,x = 3.3633309$, cui corrisponde il numero 2308,5. Questo coefficiente vien quindi a dare un' altezza che supera di tese 74 e $\frac{1}{2}$, o del 3 ed $\frac{1}{3}$ per 100 la media delle misure geometriche.

ovvero $x^2 + \frac{2x}{m} = \frac{2BC}{m} l(\frac{A}{y})$; e cangiando i logaritmi Neperiani nei tavolari, $x^2 + \frac{2x}{m} = \frac{2BCl\,10}{m} L\frac{A}{y}$. Le radici di quest' equazione sono

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 2BCml\,10\,L\frac{A}{y})}}{m}$$. E qui si osservi esser $Bl\,10 = 9240,7$; $2Bl\,10 = 18481,4$; ed $m = 0,00004666$; colle quali sostituzioni si troverà

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 18481,4 \times 0,00004666\,CL\frac{A}{y})}}{0,00004666}$$; o sia

$x = 21432(-1 \pm \sqrt{(1 + 0,862342\,CL\frac{A}{y})})$; nella qual equazione il radical negativo non serve, perchè le altezze x si suppongon positive. Il logaritmo della frazion costante 0,862342 è $= 9.9356796$. Sian di più $LC = M$, $L\frac{A}{y} = M'$, ed il numero corrispondente alla somma di questi tre logaritmi $= N$. Ciò posto, sarà $x = 21432(\sqrt{(N+1)} - 1)$.

Applichiamo anche questa formola ai tre esempj del num. prec., ed avremo nel primo $L\frac{A}{y} = 0.0014032$, e $C = 1,0306$. Dunque

$$L\left(L\frac{A}{y}\right) = 7 \,.\, 1471196$$

$$L\,C = 0 \,.\, 0130901$$

$$L\,fraz.\,cost. = 9 \,.\, 9356796$$

$$Somma = 7 \,.\, 0958893$$

A questo logaritmo corrisponde il numero 0,001247653, ovvero 0,00125 $=N$. Dunque $\sqrt{(N+1)}$ è $=\sqrt{1{,}00125}$. Ora il logaritmo di 1,00125 è 0,0005425, e la sua metà 0,0002712, cui corrisponde il numero 1,00062. Dunque sarà $x=21432\times 0{,}00062=13^{te}, 38784=80^{pie}, 32704$. L'altezza calcolata è quindi maggior della vera di $\frac{178}{1000}$ di piede, o poco più di 2 pollici.

Nel secondo esempio abbiamo $L\frac{A}{y}=0\,.\,0510293$, e $C=1{,}0544$. Dunque

$$L\left(L\frac{A}{y}\right) = 8 \,.\, 7078197$$

$$L\,C = 0 \,.\, 0230054$$

$$L\,fraz.\,cost. = 9 \,.\, 9356796$$

$$Somma = 8 \,.\, 6665047$$

A questo logaritmo corrisponde il numero 0,046399. E' dunque $N+1=1{,}046399$; $\sqrt{(N+1)}=1{,}022936$; e finalmente $x=21432\times 0{,}022936=491^{te}, 57$. L'altez-

za calcolata supera dunque la vera di tese 3 e $\frac{1}{3}$. Nell' ultimo esempio è $L\frac{A}{y}=0.2287903$, e $C=1,1198$. Dunque

$$L\left(L\frac{A}{y}\right) = 9\,.\,3594372$$

$$LC = 0\,.\,0491405$$

$$L\,fraz.\,cost. = 9\,.\,9356796$$

$$Somma = 9\,.\,3442573$$

Il numero corrispondente a questo logaritmo è 0,220931; ond' è $N+1=1,220931$; $\sqrt{(N+1)}=1,104957$; ed $x=21432\times0,104957=2249^{te},44$. Per questo calcolo la cima del Mon-bianco è dunque superiore al lago Lemano di tese 2262,94, altezza che supera la media geometrica di 15^{te}, 44.

Si avverta però, che le tre altezze così calcolate dovrebber diminuirsi di 17 milionesime, perchè $\frac{1}{0,00004666}$ non è esattamente 21432, ma 21431,623.

28. In questi esempj si può osservare che la sola differenza dei logaritmi delle altezze barometriche moltiplicata per 10000 dà, se non esattamente, almen presso a poco le distanze verticali delle stazioni in millesime di tesa. Nel primo il risultato è 14,032; nel secondo 510,273; nel terzo 2287,903 non molto diversi dalle anzidette distanze. Moltiplicando adunque si fatte differenze per 0,00004666 diminuzion del calore per ogni tesa nell' ipotesi della progressione armonica, si troverà di quanto il calore della stazion inferiore abbia a dimi-

nuirsi per aver quello della superiore. E ciò posto, dato il valore di C, sarà noto quello eziandio di c, senza far uso del calor osservato alla stazion superiore, di cui già abbiam veduto quanta sia l' irregolarità e l' incertezza. Così nel secondo esempio la differenza 510 moltiplicata per 0,00004666 dà la diminuzion del calore $=0{,}0237966$; e questa sottratta da 1,0544 calore della stazion inferiore, dà $c=1{,}0306034$. Determinato così il valor di c, dalla formola primitiva $c=\frac{C}{1+mx}$ si deduce immediatamente $mx=\frac{C-c}{c}$.

Il sig. Abate Oriani sostituendo questo valor di mx nella prima formola dell' integrazione

$\frac{mx^2}{2}+x=BCl\,10\,L\frac{A}{y}$, la cangia in un' altra assai più semplice, la qual coincide con quella che l'Hennert avea già data nella citata sua dissertazione. Si avverta però, che l' uno e l' altro suppongono il calore della stazion superiore esser quello che vi si trova attualmente indicato dall' osservazione. Questa nuova formola si trova ben facilmente ove si rifletta, che $\frac{mx^2}{2}+x$ è $=x\left(\frac{mx}{2}+1\right)$;

e che sostituito $\frac{C-c}{c}$ in luogo di mx, ne viene

$x\left(\frac{C-c}{2c}+1\right)=x\left(\frac{C+c}{2c}\right)$. Ciò posto, se n' ha eziandio

l' equazione

$x\left(\frac{C+c}{2c}\right)=BCl\,10\,L\frac{A}{y}$; ed $x=\frac{2Cc}{C+c}Bl\,10\,L\frac{A}{y}$.

Sostituiamo 9240,7 a $Bl\,10$; ed avrem finalmente

$x=9240,7\times\frac{2Cc}{C+c}L\frac{A}{y}$, colla qual formola si calcoleran facilmente le altezze dei luoghi, quando sian note per osservazione le tre quantità A, y, e C.

Prendiam di nuovo l' esempio secondo; nel quale è

$L\frac{A}{y}=0\,.\,0510293$; $C=1,0544$; e per conseguente il calor c vien ad essere $=1,0306$; e $C+c=2,085$. Sarà dunque

$$
\begin{aligned}
L\frac{2Cc}{C+c} &= 0\,.\,0180194\\
L\left(L\frac{A}{y}\right) &= 8\,.\,7078197\\
L\,coef.\,cost. &= 3\,.\,9657049\\
\hline
L\,x &= 2\,.\,6915440\\
x &= 491,323
\end{aligned}
$$

Quest' altezza è dunque maggior della vera di 3 tese e $\frac{1}{4}$.

In tutti i calcoli precedenti il coefficiente m è $=$ 0,00004666. Ma il sig. Hennert nella sua dissertazione, pag. 27 e seguenti, pretende che il coefficiente suddetto non possa esser costante; e ne apporta due ragioni. La prima è che dalle osservazioni termometriche fatte in diversi tempi a due stazioni fisse, la dif-

ferenza tra il calor superiore e l' inferiore non risulta costante, ma irregolare e variabile: la seconda consiste in un calcolo analitico, col quale l'autor si sforza di dimostrare *a priori*, che nell' ipotesi della progressione armonica il coefficiente *m* è necessariamente variabile. Ma alla prima ragione io rispondo che le osservazioni fatte sul dorso dei monti alla stazion superiore, non indicano il calore dello strato d' aria isolato e posto verticalmente sopra l' inferiore al livello dell' altra, ma il calor locale della stazion superiore variamente modificato dalle accidentali temperature dei luoghi e corpi vicini. Ed io, per evitar quest' inconveniente, ho scelte alcune osservazioni fatte sulle cime isolate di monti più alti di tutti quei che han dintorno, e preso un medio fra i diversi valori di *m* dati da sei osservazioni del sig. de Luc. Alla seconda ragione ha ottimamente risposto il sig. Abate Oriani nel citato opuscolo sulle rifrazioni astronomiche alla pag. 68, ove pone in chiaro il difetto della pretesa dimostrazione analitica del dotto professore di Utrecht.

TAVOLA I.

DELLE DILATAZIONI E CONDENSAZIONI DEL MERCURIO.

Condensazioni d' un pollice di mercurio da zero al grado — 15 di Reaumur.

Gradi del termometro.	*Condensazioni del mercurio.*	
0	1 , 000000	
		252
— 1	0 , 000252	
		253
— 2	0 , 000505	
		254
— 3	0 , 000759	
		254
— 4	0 , 001013	
		255
— 5	0 , 001268	
		256
— 6	0 , 001524	
		256
— 7	0 , 001780	
		257
— 8	0 , 002037	
		258
— 9	0 , 002295	
		259
— 10	0 , 002554	
		260
— 11	0 , 002814	
		261
— 12	0 , 003075	
		262
— 13	0 , 003337	
		263
— 14	0 , 003600	
		264
— 15	0 , 003864	

Dilatazioni da zero al grado + 30.

0	1 , 000000	
		251
1	1 , 000251	
		251
2	1 , 000502	
		250
3	1 , 000752	
		249
4	1 , 001001	
		248
5	1 , 001249	
		247
6	1 , 001496	
		247
7	1 , 001743	
		246
8	1 , 001989	
		245
9	1 , 002234	
		244
10	1 , 002478	
		244
11	1 , 002722	
		243
12	1 , 002965	
		242
13	1 , 003207	
		242
14	1 , 003449	
		241
15	1 , 003690	
		240
16	1 , 003930	
		239
17	1 , 004169	
		238
18	1 , 004407	

19	1 , 004645	233
20	1 , 004882	237
21	1 , 005118	236
22	1 , 005353	235
23	1 , 005588	235
24	1 , 005822	234
25	1 , 006056	234
26	1 , 006289	233
27	1 , 006521	232
28	1 , 006751	230
29	1 , 006980	229
30	1 , 007208	228

TAVOLA II.

Delle dilatazioni e dei volumi dell' aria dal grado — 15 al + 30 di Reaumur.

Gradi del termometro.	*Volumi dell' aria.*	
— 15	0 , 9295	
— 14	0 , 9340	45
— 13	0 , 9385	45
— 12	0 , 9430	45
— 11	0 , 9475	45
— 10	0 , 9521	46
— 9	0 , 9567	46
— 8	0 , 9614	47
— 7	0 , 9661	47
— 6	0 , 9708	47
— 5	0 , 9755	47
— 4	0 , 9803	48
— 3	0 , 9851	48
— 2	0 , 9900	49
— 1	0 , 9950	50
0	1 , 0000	50

		50
1	1 , 0050	
		51
2	1 , 0101	
		51
3	1 , 0152	
		51
4	1 , 0203	
		51
5	1 , 0254	
		52
6	1 , 0306	
		52
7	1 , 0358	
		53
8	1 , 0411	
		53
9	1 , 0464	
		53
10	1 , 0517	
		54
11	1 , 0571	
		54
12	1 , 0625	
		55
13	1 , 0680	
		55
14	1 , 0735	
		56
15	1 , 0791	
		55
16	1 , 0846	
		54
17	1 , 0900	
		54
18	1 , 0954	
		53
19	1 , 1007	
		53
20	1 , 1060	

		53
21	1, 1113	
		53
22	1, 1166	
		53
23	1, 1219	
		52
24	1, 1271	
		52
25	1, 1323	
		51
26	1, 1374	
		51
27	1, 1425	
		51
28	1, 1476	
		50
29	1, 1526	
		50
30	1, 1576	

TENTATIVO

Di una nuova rigorosa dimostrazione del principio dell' equipollenza.

Di Michele Araldi

Presentato ai 12 luglio 1804.

Un principio qual si è pur quello detto comunemente della equipollenza, fecondo sopra ogni altro di usi e di applicazioni all' intera Meccanica, la qual per poco tutta non pende da esso, e non sol quella che tratta dell' equilibrio, ma quella pure che versa sul movimento, merita senza dubbio che si facciano gli sforzi estremi, onde spingerlo al più alto grado di certezza metafisica, e fondar questa scienza su quelle stesse basi saldissime, su cui senza temer crollo immobilmente si regge l' edificio quanto maestoso altrettanto fermo delle Matematiche pure. Il perchè molta lode a parer mio e riconoscenza è dovuta a que' valentuomini, i quali nella persuasion forse che non fosse lecito di riposare con sicurezza e tranquillità totale su le prove recate comunemente di questo principio, avvisarono di appoggiarlo ad altre, alle quali non mancasse quell'assoluto rigore e quella esattezza che soggiogando l' intel-

letto costringe anche i più fastidiosi e difficili a dichiararsene soddisfatti. Questo pregio non esito a riconoscerlo nelle dimostrazioni che dobbiamo a un Daniele Bernoulli; a un Alembert; e fra i nostri a un Vincenzo Riccati, i quali nell' atto stesso che spaziavano per le più ardue regioni della meccanica sublime, non isdegnarono di concorrere ad assodarne ognora meglio i fondamenti, provvedendo ai bisogni della parte elementare della medesima. E di queste stesse dimostrazioni confesso pure ch' esse bastano all' uopo, e rendendo soverchio ogni ulterior tentativo, tale molto più rendono il mio; cui non pertanto io mi fo ardito a produrre, e perchè per l' una parte non può mai esser disdetto il premer le orme de' grand' uomini e degni di servire altrui d' esempio e di scorta; e perchè per l' altra, mentre le dimostrazioni loro si avvolgono e allungano per ben sei e anche sette proposizioni, questo mio tentativo, se ha pur desso raggiunto lo scopo, spedisce tutto l' affare in tre soli Teoremi, cui però passo ad esporre.

ASSIOMA 1°.

Due forze eguali e direttamente opposte si fanno equilibrio.

ASSIOMA 2°.

A due forze direttamente opposte e disuguali equivale una terza, che uguagliando la lor differenza, agisca nella direzione della maggiore.

Assioma 3°.

A due o più forze cospiranti nella stessa direzione equivale una terza eguale alla loro somma, e similmente diretta.

Teorema 1°.

(Fig. 1.) Agiscano sul corpo o punto *a* due forze espresse colle due linee *ab*, *ac* uguali e concorrenti ad angolo retto; io dico che l' equivalente verrà espressa rapporto tanto alla sua energia che alla sua direzione dalla diagonale *ad* del quadrato *abdc*.

E' per se stesso evidente che la direzione dell' equivalente cadrà su la diagonale; non essendovi ragion niuna per cui debba cadere piuttosto alla destra della medesima che alla sinistra. Essa oltracciò non potrà esserne nè maggiore nè minore. In fatti fingasi maggiore: io dico che questa ipotesi rinchiude contradizione, cioè che guida a una conseguenza opposta all' ipotesi stessa. Concepiscansi formati attorno alle due forze o linee *ab*, *ac* come a diagonali i due quadrati *ambo*, *anco*. Per la stessa ragione, per cui si suppone maggiore della diagonale *ad* l' equivalente delle forze *ab*, *ac*, maggiori delle diagonali *ab*, *ac* saranno le equivalenti alle coppie corrispondenti di forze *am*, *ao*; *an*, *ao*, o sia queste stesse diagonali potranno concepirsi equivalenti a coppie di forze eguali minori; per esempio di *am'*, *ao'*; *an'*, *ao'*. Dunque la forza supposta equivalente alle due *ab*, *ac* potrà concepirsi equivalente alle quattro *am'*, *ao'*,

an', *ao'*; ma le due *am'*, *an'* eguali ed opposte si distruggono, bilicandosi l' una con l'altra; dunque la supposta equivalente rimane equivalente non solo, ma uguale, poichè agisce nella stessa direzione, al doppio della *a o'*. Ma il doppio di questa forza *a o'* è minore della diagonale *a d*; dunque l'ipotesi fatta rinchiude contradizione; nella quale pure si urterebbe, come è facile di mostrare, nell' ipotesi, che l'equivalente delle forze *a b*, *a c* fosse minore della diagonale, a cui conseguentemente non può dessa non essere uguale precisamente. Il che ec.

TEOREMA 2°.

(Fig. 2.) Sieno ora disuguali le due forze espresse per le linee *a b*, *a d* applicate al corpo; e sia retto come dianzi, l'angolo formato dalle lor direzioni. Se formisi su queste due linee il rettangolo *a b c d*, io dico che la diagonale di questo esprimerà l' equivalente, o sia la resultante di dette due forze.

Si divida per mezzo l' angolo *b a d* colla linea indefinita *a i*: a questa pel punto *a* si tiri e si allunghi quinci e quindi la normale *m n*: su questa e sopra la linea *a i* cadano le normali *b m*, *d n*; *b o*, *d u*. Le due forze *a b*, *a d* espresse dalle diagonali de' due quadrati *a m b o*, *a n d u* potranno risguardarsi (Teor. 1°.) come resultanti, la prima, di due forze espresse dalle *a m*, *a o*; la seconda, di due altre espresse dalle *a n*, *a u*. Si abbassi pure su la *a i* la normale *c i*; e su la *m n* la normale *c e*. Dalla costruzione resulta visibilmente che le linee *am*, *u o*, *e n*, *i u*, sono eguali; o sia che

la linea *a i* è uguale alla somma delle *a o*, *a u*; e la linea *a e* è uguale alla differenza delle *a n*, *a m*. Donde segue (Assiomi 2°. e 3°.) che la resultante di due forze espresse dalle *a i*, *a e* è uguale e anzi identica alla resultante delle due date *a b*, *a d*. Dalla costruzione pure resulta che i due rettangoli *a b c d*, *a i c e* hanno la stessa e identica diagonale. Poichè dunque identiche di valore e di posizione sono le resultanti sì delle due forze *a b*,, *a d*, che delle due *a i*, *a e*, resta a provare che ciò non può avverarsi se queste resultanti non sono sì l' una che l' altra espresse dalla diagonale *a c*.

Suppongasi che ciò non sia; e prima, ch' esse non cadano sulla diagonale, E' manifesto ch' esse, queste risultanti, non ponno in entrambi i rettangoli cader similmente, cioè tra la diagonale e la forza, o sia il lato maggiore, oppure tra la diagonale e la forza, o sia il lato minore; poichè in simil caso esse più non coinciderebbero. E' forza dunque ch' esse o cadano entrambe su la diagonale, o cadano dalla stessa banda, cioè o entrambe alla destra, o entrambe alla sinistra della diagonale medesima; nel qual caso è chiaro che una d' esse cadrebbe tra la diagonale e il lato maggiore; l' altra tra la diagonale e il lato minore del respettivo rettangolo.

(Fig. 3.) Suppongasi che appunto ciò accada; cioè che a cagion d' esempio nel rettangolo *a b c d* la resultante *a f* cada tra la diagonale *a c* e il lato minore *a b*; e nel rettangolo *a e c i* cada tra la diagonale *a c* e il lato maggiore *a i*: Si fissi ora l' occhio su le fig. 3 e 4. In questa si concepisce che in due sole direzioni poste ad angolo retto agiscano sul corpo o punto *a* prima di-

sgiuntamente, poi simultaneamente le quattro forze $a\,d$, $a\,i$; $a\,c$, $a\,b$; le due prime lungo il lato $a\,d'$; le due altre lungo il lato $a\,b'$. Colle due forze, o sia i due lati $a\,i$, $a\,c$ formato il rettangolo $a\,e\,c\,i$, la resultante $a\,f$ cadrà secondo l' ipotesi tra il lato $a\,i$ e la diagonale $a\,c$; e dependentemente da questa stessa ipotesi se si concepisca che su lo stesso corpo o punto a agiscano le altre due forze $a\,d$, $a\,b$, formato parimente il rettangolo $a\,b\,c'\,d$, la resultante $a\,f'$ cadrà tra il lato $a\,b$, e la diagonale $a\,c'$. Siccome di sopra si è mostrato che queste resultanti sono necessariamente uguali; e che oltracciò, poichè esse nella Fig. 2. coincidono, non ponno non formare lo stesso angolo colle respettive diagonali; cioè che gli angoli (Fig. 3.) $c\,a\,f$, $c\,a\,f'$ sono uguali, è manifesto che se queste due resultanti agissero congiuntamente sul punto a, la resultante loro o sia quella delle quattro forze applicate nel modo accennato al corpo o punto, dividerebbe pel mezzo l' angolo $c\,a\,c'$; il che è lo stesso che il dire ch' essa cadrebbe su la diagonale del Rombo, i cui lati sieno le due linee uguali $a\,c$, $a\,c'$. Si prenda sul lato $a\,b'$ la $e\,b'$ uguale alla $a\,b$; e sul lato $a\,d'$ la $i\,d'$ uguale alla $a\,d$, e si formi il rettangolo $a\,d'\,c''\,b'$. Poichè per la costruzione $b\,b'$ è uguale ad $a\,e$, e $d\,d'$ uguale ad $a\,i$, è manifesto che i due lati $a\,c$, $c'\,c''$ del Rombo $a\,c\,c''\,c'$ sono diagonali di due Rettangoli uguali in tutto, e per tal modo collocati, che, come la semplice ispezione basta a mostrare, la diagonale del Rettangolo $a\,d'\,c''\,b'$ non può non coincidere colla diagonale del Rombo $a\,c\,c''\,c'$. Dunque la resultante delle quattro forze $a\,b$, $a\,d$; $a\,c$, $a\,i$ cade sulla diagonale del Rettangolo, i lati del quale

esprimono la somma, l' uno delle forze ad, ai; l' altro delle forze ab, ae. Dunque nell' ipotesi che da due forze poste ad angolo retto, ed espresse dalle linee ab, ad nasca una equivalente, che cada tra la diagonale e un lato del Rettangolo formato su dette linee, esisterà necessariamente una coppia di altre due forze ab', ad' poste ad angolo retto, la resultante delle quali cadrà su la diagonale del Rettangolo formato su le linee esprimenti dette due forze.

Posto ciò e ritenuto; sieno date due forze qualunque ab', ad', che agiscano sul punto a, nel quale le direzioni loro concorrono ad angolo retto. Si formi il rettangolo $ab'c''d'$. Si concepiscano formati entro detto rettangolo e attorno alla sua diagonale ac'' infiniti rombi, de' quali uno sia per esempio $acc''c'$. Niente vieta ch' io immagini la forza ab' spezzata nelle due ab, $ae=bb'$; e ch' io immagini pure che colla ab si accoppii la ad; il che si strascinerà seco l' accoppiamento della $ai=dd'$ colla ae. Ma da questo spezzamento e accoppiamento segue necessariamente che la resultante delle quattro forze cade su la diagonale ac'': dunque sempre su questa stessa diagonale cade la resultante delle due forze ab', ad'. In fatti se a taluno rimanesse pur qualche dubbio su la giustezza di quest' ultima conchiusione, fingasi che la resultante delle dette due forze ab', ad' non cada già su la diagonale ac''. Ne seguirà che non si potrà immaginare lo spezzamento della ab' nelle due ab, $ae=bb'$: e della ad' nelle due ad, $ai=dd'$. Or questo chi dirà mai? Ma tostochè si riconosca lecito lo spezzamento, alla resultante delle due ab, ad, e al suo valore, e alla sua po-

sizione è legata per modo la resultante delle due $a\,i$, $a\,e$, che la resultante delle quattro non può non cadere su la diagonale $a\,c''$. Dunque ec.

(Fig. 5.) Suppongasi che l'equivalente delle due $a\,b$, $a\,d$ cada bensì su la diagonale, ma sia maggiore di questa. Si potrà dunque concepire che questa diagonale sia l'equivalente di due altre forze poste similmente ed espresse da due linee $a\,b'$, $a\,d'$ minori delle prime, ma ad esse proporzionali. E' manifesto in fatti che l'equivalente di simili forze, per ciò che si è dimostrato, dovrà cadere su la stessa diagonale, e conseguentemente che dovrà incontrarsi una coppia di esse, l'equivalente delle quali adegui la diagonale medesima. Sieno queste le $a\,b'$, $a\,d'$; e guidata pel punto a la $m\,n$ normale alla diagonale, su di essa e su la diagonale cadano le normali $b\,m$, $b'm'$, $d\,n$, $d'n'$; $b\,o$, $b'o'$, $d\,u$, $d'u'$. E' chiaro che le due $a\,m$, $a\,n$ sono eguali; e lo sono pure fra loro le due $a\,m'$, $a\,n'$. E' pur facile a scorgersi che le linee ab, $a\,b'$; $a\,d$, $a\,d'$ sono diagonali similmente poste alla diagonale $a\,c$. Dunque, come supponesi $a\,c$ la resultante delle due $a\,b'$, $a\,d'$; così le $a\,b$, $a\,d$ saranno le resultanti, la prima di $a\,m'$, $a\,o'$; la seconda di $a\,n'$, au'. Dunque la resultante di $a\,b$, $a\,d$ supposta maggiore di $a\,c$ si potrà risguardare come resultante delle quattro $a\,m'$, $a\,n'$, $a\,o'$, $a\,u'$. Ma tra queste le due prime uguali e direttamente opposte si distruggono (Ass. 1.). Dunque la detta supposta resultante rimane equivalente; e anzi a mottivo della coincidenza di direzione, uguale (Ass. 2.) alla somma delle due $a\,o'$, $a\,u'$; cioè il maggiore al minore; assurdo in cui pure si urterebbe, supponendo la resultante delle

due $a b$, $a d$ minore di $a c$. Resta dunque che le sia uguale precisamente. Il che ec.

Teorema 3°.

(Fig. 6) Qualunque sia l'angolo formato dalle direzioni delle due forze che agiscono sul punto a, ed espresse dalle linee $a b$, $a d$, se formisi il parallelogrammo $a b c d$; la diagonale $a c$ di questo esprimerà il valore e la direzione dell' equivalente di dette due forze.

Si guidi pel punto a la $m n$ normale alla diagonale; e cadauno su la stessa, e su la diagonale le normali $b m$, $d n$, $b o$, $d u$. E' manifesto che sono uguali le due $a m$, $a n$; e uguali pure fra loro le due $a o$, $o u$. Ora alla forza $a b$ è lecito il sostituire (Teor. 2°.) le due $a m$, $a o$; e alla forza $a d$ le due $a n$, $a u$. Dunque l'equivalente delle due forze $a b$, $a d$ è identica a quella delle quattro $a m$, $a o$; $a n$, $a u$. Ma le due forze $a m$, $a n$ visibilmente si elidono; dunque l' equivalente si riduce alle due $a u$, $a o = c u$; o sia alla diagonale del parallelogrammo formato su' lati $a b$, $a d$. Dunque ec.

Scolio.

Può parere cosa in tutto soverchia l' arrestarsi a mostrare per quali vincoli e quanto stretti ed essenziali il principio dell' Equipollenza colleghisi con quello delle velocità virtuali e con quello pure del celebre d' Alembert. E' noto eziandio che a questi due ultimi principii è tenuto il Meccanico del vantaggio inesti-

mabile, per cui, giovandosi di certe formole ch' essi gli offrono, semplici assai e sopra modo pieghevoli ad ogni suo uopo, ei riesce a tradurre nel linguaggio algebraico i suoi ragionamenti, e a domare con questo possente strumento i più ardui problemi. Egli è sopra di essi che il nostro illustre Lagrangia innalzò il nobile e quanto niun altro magnifico monumento *del gran viaggio della mente umana*, che ammirasi nella sua Meccanica analitica. Ma poichè anche i sommi matematici ci danno il lodevole esempio di scendere dalle loro altissime speculazioni alle idee elementari e ai fondamenti della scienza, ci si conceda di recare una o due riflessioni intorno alla reciproca dependenza de' due principii, dell'equipollenza, e delle velocità virtuali nella teoria dell' equilibrio, alla quale sembra che competa in modo speciale quella suprema evidenza che la mette in istato di sostenere il confronto delle matematiche pure. L'assistenza scambievole che prestansi in essa i mentovati principii, è tale che forse si pena a decidere quale dei due tra le mani della natura sia il primo in ordine, e debba aversi in conto del primo anello, da cui penda l' intera catena delle verità comprese in quella teoria. Si può egualmente, partendo dal principio delle velocità virtuali, giugnere a quello dell' equipollenza; o partendo da questo, dimostrar l'altro. Intorno a quest'ultimo passaggio, la brevità della dimostrazion seguente e la semplicità della costruzione con cui vi si giugne, ne fa coraggio a collocarla in questo luogo.

(Fig. 7) Nel parallelogrammo $a\,b\,c\,d$ se prendasi su la diagonale il punto p qualunque, e si guidino ai

lati le normali $p\,i$, $p\,l$, io dico che sarà $a\,p \times a\,c = a\,i \times a\,b + a\,l \times a\,d$.

Dagli angoli b, d s'intendano condotte su la diagonale le normali uguali $b\,f$, $d\,e$. Per la simiglianza de' due triangoli $a\,p\,i$, $a\,b\,f$, si avrà $a\,p \times a\,f = a\,b \times a\,i$. Parimente dai due triangoli simili $a\,p\,l$, $a\,d\,e$ ottiensi $a\,p \times a\,e = a\,d \times a\,l$. Dunque $a\,p \times a\,f + a\,p \times a\,e = a\,p \times \overline{a\,f + a\,e} = a\,p \times a\,c = a\,b \times a\,i + a\,d \times a\,l$. Il che ec.

Nello stesso parallelogrammo prendasi fuori della diagonale il punto qualunque n. Si guidino da esso su la diagonale e su i lati le normali $n\,p$, $n\,m$, $n\,g$; io dico che si avrà sempre $a\,p \times a\,c = a\,m \times a\,b + a\,g \times a\,d$.

Basterà mostrare che $a\,m \times a\,b + a\,g \times a\,d$ è $= a\,b \times a\,i + a\,d \times a\,l$. Si conducano dai punti m, l le due rette $m\,h$, $l\,o$ parallele ad $n\,p$, e che taglino le $p\,i$, $n\,g$ ne' punti h, o. E' manifesto che $m\,h = l\,o$. Ora poichè sono simili i triangoli $a\,b\,f$, $m\,i\,h$, sarà $a\,b \times m\,i = b\,f \times m\,h$; ed essendo pur simili i due triangoli $a\,e\,d$, $l\,g\,o$, sarà $a\,d \times g\,l = e\,d \times o\,l$. Ma $m\,h \times b\,f = e\,d \times o\,l$; dunque $a\,b \times m\,i = a\,d \times g\,l$. Posto ciò, essendo $a\,b \times a\,m = a\,b \times \overline{a\,i + m\,i}$; ed essendo pure $a\,d \times a\,g = a\,d \times \overline{a\,l - g\,l} = a\,d \times a\,l - a\,d \times g\,l$, si avrà $a\,b \times a\,m + a\,d \times a\,g = a\,b \times a\,i + a\,b \times m\,i + a\,d \times a\,l - a\,d \times g\,l$; e sostituendo $a\,b \times m\,i$ in luogo di $a\,d \times g\,l$, ne risulterà $a\,b \times a\,m + a\,d \times a\,g = a\,b \times a\,i + a\,d \times a\,l$. Il che ec.

E' quasi soverchio l'avvertire che se il punto supposto in p, o in n venga concepito fuori del piano delle forze, poichè può immaginarsi che una normale cada da detto punto sul piano e lo tagli per esempio in n, la dimostrazione abbraccia anche questo caso, vale a

dire gli abbraccia tutti. In essa poi palesemente rinchiudesi quella del principio delle velocità virtuali; e dalla medesima sembra pur lecito d'inferire, che se conformemente a questo principio si concepisca che un corpo, attorno a cui più potenze stanno in equilibrio, venga per un istantaneo impulso a spostarsi, non è già necessario il supporre ch' esso trascorra per uno spazio infinitesimo. Di questa condizione niun cenno non si fa nella dimostrazione; esso, questo spazio può concepirsi finito; alla qual conchiusione fu pure da' suoi calcoli ingegnosi e profondi guidato il ch. sig. cavalier Fossombroni. Benchè su questo proposito taluno potrebbe osservare, che parlando a rigore, il concetto di quantità infinitesime sembra comprendere un certo confronto con altre, rimpetto alle quali, ove trattisi di aggiugnerle o sottrarle, ponno esse trascurarsi. Però forse un concetto tale non ha luogo in un caso, in cui si versa sopra quantità che non si confrontano che con se stesse, cioè con altre della stessa indole. Per altro confesso che questo discorso pute un tal poco di metafisica, la qual mi riesce sempre sospetta; motivo per cui lodevolissimi giudico i Saggj antichi, presso de' quali niun indizio non se ne incontra; e qualche volta in me sorge timore che i moderni si addomestichino un po' troppo con essa, non senza qualche discapito di quella severità e di quel sommo rigore che costituisce il pregio di cui debbono sopra ogni altro risplendere i ragionamenti de' matematici.

Fine della prima parte.

Fig 1

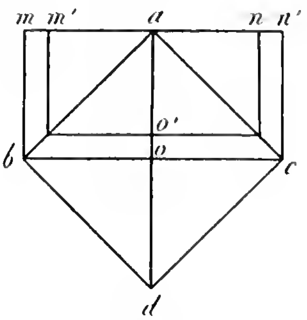


Fig 2

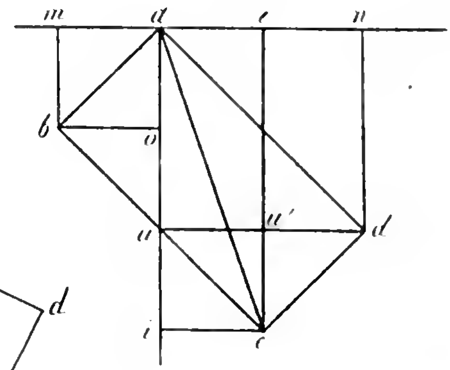


Fig. 3

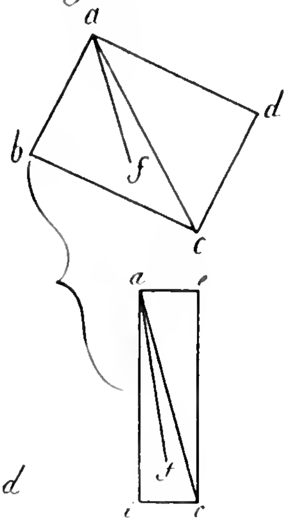


Fig. 7

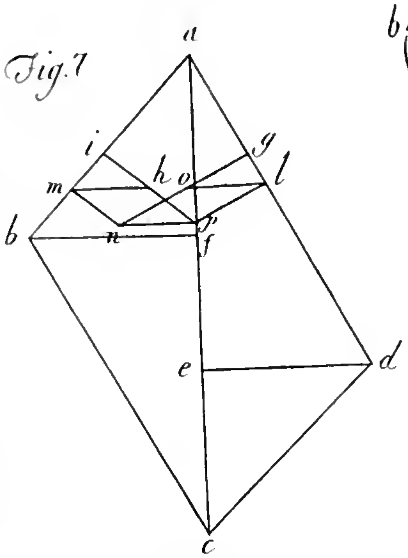


Fig 4

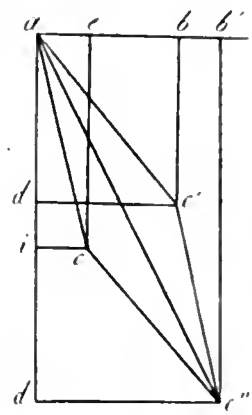


Fig 5

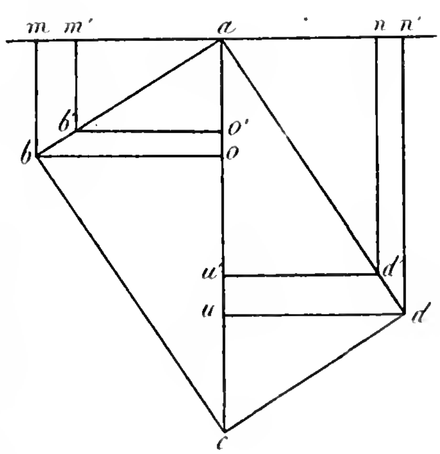
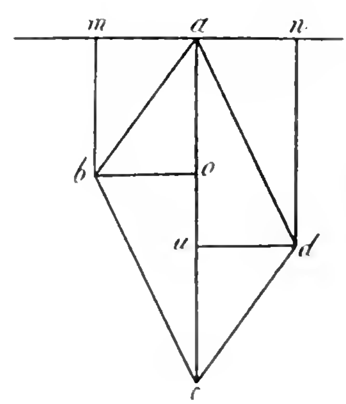


Fig 6



INDICE

DEGLI ESTRATTI E DELLE MEMORIE

Estratti

Di un nuovo sale fossile scoperto nel Bolognese Pag. XIX

Delle cagioni diradatrici delle tenebre nell'eclissi solare degli 11. Febbrajo 1804. XXVI

Del movimento retrogrado del sangue e della forza nervea XXXIV

Osservazioni chimico-galvaniche LIV

Memorie

Saggio sui movimenti proprj delle Fisse. *Del P. Giuseppe Piazzi* Pag. 1

Della quadratura di certe superficie di special curvatura, e della cubatura de' solidi chiusi tra le medesime. *Del Canonico Girolamo Saladini* 69

Osservazioni pratiche di chirurgia. *Di Gio: Battista Palletta* 86

Elementi di trigonometria sferoidica. *Di Barnaba Oriani* 118

Nuove ricerche dirette a rettificare la teoria della resistenza de' fluidi e le sue applicazioni. *Di Giuseppe Avanzini* 199

Sulle Livellazioni barometriche. *Di Francesco Venini* 333

Tentativo d'una nuova rigorosa dimostrazione del principio dell' equipollenza. *Di Michele Araldi* 415

Pagina	*Linea*	*Errori*	*Correzioni*
XV	7	*cheranno*	*ranno*
91	27	Eessa	Dessa
125	7	$\dfrac{1-\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{3}{2}}}{\text{sen}\,\varphi^2-\left(\frac{G}{G}\right)^{\frac{3}{2}}\text{sen}\,\lambda^2}$	$\dfrac{1-\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}}}{\text{sen}\,\varphi^2-\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}}\text{sen}\,\lambda^2}$
ivi	12	$\left(\frac{56753}{57018,4}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{56753}{57018,4}\right)^{\frac{2}{3}}$
135	8	$(1-e^2)d\varpi\,\text{sen}\,\zeta\cos\lambda$	$(1-e^2)d\phi\,\text{sen}\,\zeta\cos\lambda$
137	13	$\sqrt{}\,]^1$	$\sqrt{}\,[^1$
143	10	$\text{sen}\,\upsilon^3$	$\text{sen}\,\upsilon^2$
157	7	$\frac{b}{a}=\text{tang}\,\lambda$	$\frac{b}{a}\,.\,\text{tang}\,\lambda$
191	4	60°	60^2
238	2	io	in
258	15	permettere	premettere
260	23	il γ	in γ
267	4	dalle	delle
282	17	per cose	per le cose
294	18	indetermitata	indeterminata
299	7	palla	pala
310	18	$n\,u\,b$	$n\,u\,(b'+\lambda)$
316	7	la	lo
343	14	garitmi	logaritmi

21